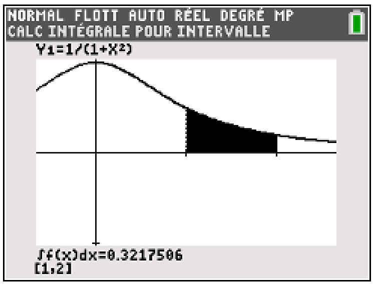
Chap 10. ***Calcul intégral***

Livre p 363 – Chap 12. Calcul intégral

1. Calcul d'aires

a. Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$, on note $\int_a^b f(x)\,dx$ l'aire, en unités d'aires (u.a.), du domaine plan D compris entre :



L'axe des abscisses
La courbe (C_f) représentatives de f
Les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$

C'est-à-dire que $M(x\,;y) \in D$ si et seulement si : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

$A(D) = \int_a^b f(x)\,dx$ u.a.
(lire : « intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ »)

b. Autres cas

Cas particulier où $a = b$: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
Cas particulier où $b < a$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.
Cas particulier où f est négative sur $[a\,;b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = -A(D)$
Cas particulier où f change de signe sur $[a\,;b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = A(D_1) - A(D_2)$ où :

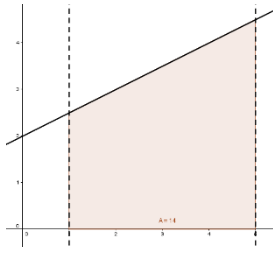
D_1 est le domaine entre l'axe des abscisses et la partie de (C_f) située au-dessus de l'axe
D_2 est le domaine entre l'axe des abscisses et la partie de (C_f) située en-dessous de l'axe

c. Méthodes de calculs approchés

Méthode des rectangles : Permet d'obtenir un encadrement de l'intégrale quand la fonction est monotone.
Méthode du point milieu : Permet d'obtenir une valeur approchée correcte dans la majorité des cas.
Méthode des trapèzes : Permet d'obtenir une valeur approchée plus précise qu'avec des rectangles.
Méthode de Simpson : Une approximation par des morceaux de paraboles donne encore plus de précisions mais demande l'utilisation d'un outil numérique (calculatrice ou ordinateur)

2. Intégrales

a. Introduction : Aire d'un trapèze



Soient a, b, m et p quatre réels tels que la fonction f définie par $f(x) = mx + p$ soit positive sur l'intervalle $[a\,;b]$

L'aire du domaine plan D compris entre :

L'axe des abscisses
La courbe (C_f) représentatives de f
Les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$

correspond à l'aire d'un trapèze de hauteur : $h = b - a$, de petite et grande base : $f(a)$ et $f(b)$
Donc : $A = ½\,(b - a)\,[f(a) + f(b)] = ½\,(b - a)\,[ma + p + mb + p]$
$A = ½\,[mab + 2pb + mb^2 - (ma^2 + 2pa + mba)] = ½\,mb^2 + pb - ½\,ma^2 - pa$
$A = F(b) - F(a)$ où : $F(x) = ½\,mx^2 + px$ est une primitive de f.
On va démontrer que cette formule est vraie pour toute fonction contine f…

b. Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

Pour tous réels a et b de I, on a : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque : Le calcul d'une intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.

(« C'est l'hécatombe dans l'indifférence car les k tombent dans la différence »)

Démonstration dans le cas particulier où f est croissante et positive sur I avec $a < b$.

Soit $A(x_0)$ l'aire du domaine compris entre $x = a$, $x = x_0$, l'axe des abscisses et la courbe (C_f)

Pour tout $h > 0$, on a : $h \times f(x_0) \leq A(x_0 + h) - A(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$… on arrive finalement à $A'(x_0) = f(x_0)$

Remarque : Il faut ensuite étudier le cas où $h < 0$, puis le cas où f est décroissante.

Pour la démonstration dans le cas où f n'est pas positive sur I, il suffit de poser $g = f - \min(f)$

c. Primitive qui s'annule en a

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et $a \in$ I, la primitive de f qui s'annule en $x = a$ s'écrit : $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

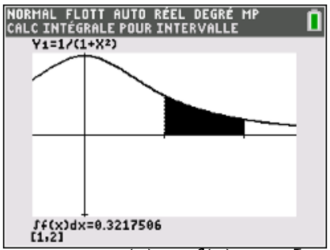
d. Calcul d'aires

Rappel : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$, et D le domaine plan compris entre :

L'axe des abscisses

La courbe (C_f) représentatives de f

Les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$



C'est-à-dire que M$(x\,;y) \in D$ si et seulement si : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

$A(D) = \int_a^b f(x)\,dx$ u.a.

De plus : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que : $g(x) \leq f(x)$ sur $[a\,;b]$, et D le domaine plan compris entre :

Les courbe (C_f) et (C_g) représentatives de f et g

Les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$

C'est-à-dire que M$(x\,;y) \in D$ si et seulement si : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$

$A(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ u.a.

3. Propriétés

a. Linéarité

Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a\,;b]$ et tous réels λ et μ, on a :

$\int_a^b (\lambda \times f(x))\,dx = \lambda \times \int_a^b f(x)\,dx$ (Attention : λ doit être une constante !)

$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

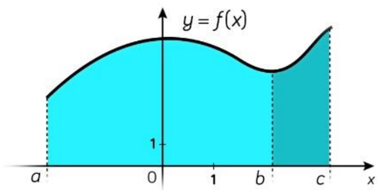
Et plus généralement : $\int_a^b (\lambda \times f(x) + \mu \times g(x))\,dx = \lambda \times \int_a^b f(x)\,dx + \mu \times \int_a^b g(x)\,dx$

b. Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et trois réels a, b, c de I.

Alors : $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

Remarque : Dans le cas où f est une fonction positive et que $a < b < c$, cela s'illustre très simplement sur un graphique avec le calcul d'aires …



c. Cas particuliers

Soit f une fonction continue sur I et $a \in$ I.
Si f est paire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$
Si f est impaire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$
Si f est périodique de période T, alors : $\int_{a}^{a+T} f(x)\, dx = \int_{0}^{T} f(x)\, dx$

d. Inégalités

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$

- Positivité de l'intégrale :
  Si f est positive sur $[a\,;b]$ alors : $\int_{a}^{b} f(x)\, dx \geq 0$.
- Compatibilité avec l'ordre :
  Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a\,;b]$ alors : $\int_{a}^{b} f(x)\, dx \geq \int_{a}^{b} g(x)\, dx$.

Attention : Dans les deux cas, on doit avoir $a \leq b$.

e. Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ telle que : $m \leq f(x) \leq M$,
alors : $m(b - a) \leq \int_{a}^{b} f(x)\, dx \leq M(b - a)$

f. Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ avec $a \neq b$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ le nombre :
$m = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\, dx$

g. Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$, alors :
$\int_{a}^{b} u(x)\, v'(x)\, dx = [u(x)\, v(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u'(x)\, v(x)\, dx$

4. Calcul de volumes (Hors-programme)

a. Solides quelconques

Soit Ω un solide quelconque de l'espace compris entre les plans d'équation $x = a$ et $x = b$ avec $a \leq b$, et S la fonction qui à tout réel x de $[a\,;b]$ associe la surface de la section du solide Ω avec le plan de d'abscisse x. Le volume du solide Ω en unités de volumes vaut alors :

$$V(\Omega) = \int_{a}^{b} S(x)\, dx$$

b. Solides de révolution

Soit Ω un solide de révolution de l'espace compris entre les plans d'équation $x = a$ et $x = b$ avec $a \leq b$, et f la fonction qui à tout réel x de $[a\,;b]$ associe le rayon du disque de section du solide Ω avec le plan de d'abscisse x. Le volume du solide Ω en unités de volumes vaut alors :

$$V(\Omega) = \int_{a}^{b} \pi\,[f(x)]^2 dx = \pi \int_{a}^{b} [f(x)]^2 dx$$

c. Solides de révolutions classiques

- Exemple du cône de rayon R et de hauteur h : $V = \int_{0}^{h} \pi \left[\frac{R}{h}x\right]^2 dx = \frac{1}{3}\pi R^2 h$
- Exemple de la boule de rayon R : $V = \int_{-R}^{R} \pi \left[\sqrt{R^2 - x^2}\right]^2 dx = \frac{4}{3}\pi R^3$