

Chap 09. Combinatoire et dénombrement

Livre p 25 – Chap 1. Combinatoire et dénombrement

1. p -uplets

a. Produit cartésien

Avec deux ensembles : $A \times B$, ensemble des couples (a, b) . Cas particulier : $A \times A = A^2$.

Avec trois ensembles : $A \times B \times C$, ensemble des triplets (a, b, c) . Cas particulier : $A \times A \times A = A^3$.

Généralisation à p ensembles : $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p$, ensemble des p -uplets (a_1, a_2, \dots, a_p) .

Cas particulier : $A \times A \times \dots \times A = A^p$.

b. Propriété

Avec le produit cartésien : $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$ et donc : $\text{Card}(A^2) = [\text{Card}(A)]^2$

Plus généralement : $\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p) = \text{Card}(A_1) \times \text{Card}(A_2) \times \dots \times \text{Card}(A_p)$

et $\text{Card}(A^p) = [\text{Card}(A)]^p$.

2. Arrangements et permutations

a. Factorielle

Définition : $0! = 1$ et pour tout entier naturel n non nul : $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k$

Propriété : $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Utilisation de la calculatrice : $\langle \text{math} \rangle$ PROB 4 : !

b. Arrangement de p éléments d'un ensemble à n éléments

Soit $p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments d'un ensemble E , tout p -uplet d'éléments distincts de E .

Remarque : Les éléments sont tous différents et l'ordre est important.

Si $p = 2$, on a des couples $(x_1; x_2)$ avec $x_1 \neq x_2$

Si $p = 3$, on a des triplets $(x_1; x_2; x_3)$ avec $x_1 \neq x_2, x_1 \neq x_3, x_2 \neq x_3$.

c. Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments est généralement noté A_n^p et

vaut : $A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$

Utilisation de la calculatrice : $\langle \text{math} \rangle$ PROB 2 : Arrangement (se note alors : ${}_n A_p$)

Exemple d'utilisation : Tiercé.

d. Permutation des éléments d'un ensemble

Une permutation des éléments d'un ensemble E est un arrangement de tous les éléments de l'ensemble.

Propriété : Dans un ensemble à n élément, il y a $n!$ permutations possibles.

Exemple d'utilisation : Anagrammes d'un mot dont toutes les lettres sont différentes.

3. Combinaisons

a. Combinaison à p éléments d'un ensemble à n éléments

Soit $p \leq n$. On appelle partie (ou combinaison) à p éléments d'un ensemble E , tout sous-ensemble à p éléments de E .

Remarque : Les éléments d'un ensemble sont tous différents et ne sont pas ordonnés.

b. Propriété

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments est noté $\binom{n}{p}$ et appelé coefficient binomial, il se lit : « p parmi n » (anciennement noté C_n^p) et vaut :

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-(p-1))}{p \times (p-1) \times \dots \times 1} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$

Exemple d'utilisation : Loto.

c. Propriété de symétrie

Soit $p \leq n$. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

d. Relation et triangle de Pascal

Relation de Pascal : Soit $p < n$. $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Triangle de Pascal :

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

e. Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Si $\text{Card } E = n$, alors : $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n$, c'est-à-dire que : $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$.

f. Binôme de Newton (Programme de Maths expertes)

$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$ (exercice n°122 p 49)