Chap 9. Fonctions trigonométriques

Livre p 313 – Chap 10. Fonctions trigonométriques

1. Cercle trigonométrique

a. Définition

Enroulement de la droite réelle sur le cercle de centre O et de rayon 1.
Angles orientés de vecteurs.

b. Radians

Les angles orientés sont définis « modulo 2π ».
Notations : $x = \alpha\ [2\pi]$ ou $x = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

c. Mesure principale

Pour un angle orienté donné, il existe une unique mesure comprise dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, elle est appelée mesure principale.

d. Conversion degrés/radians

x en rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
x en deg	0	30	45	60	90	180

2. Fonctions trigonométriques

a. Rappel : dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A, on a :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$$
$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}$$
$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB}$$

Propriétés : $\cos^2(\widehat{ABC}) + \sin^2(\widehat{ABC}) = 1$ (Théorème de Pythagore)

$\cos(\widehat{ABC}) = \sin(\widehat{ACB})$ et $\sin(\widehat{ABC}) = \cos(\widehat{ACB})$

$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{\sin(\widehat{ABC})}{\cos(\widehat{ABC})}$ et $1 + \tan^2(\widehat{ABC}) = \frac{1}{\cos^2(\widehat{ABC})}$

b. Rappel : sur le cercle trigonométrique

Soit M(x ; y) un point du cercle trigonométrique et $\alpha = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$, on note :

$$\cos(\alpha) = x$$
$$\sin(\alpha) = y$$

et si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors $\tan(\alpha) = z$ où z est l'ordonnée du point N intersection de (OM) et de $(\Delta) : x = 1$.

Propriétés : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ (Rayon du cercle trigonométrique)

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ et $1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

c. Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non déf.

d. Angles associés

Pour tous réels x on a :

$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

e. Equations

$\cos x = \cos a$ si et seulement si $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.
$\sin x = \sin a$ si et seulement si $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.
Remarque : Soit n un entier relatif, si $x = a + \frac{2k\pi}{n}$, $k\in\mathbf{Z}$, alors il y a n valeurs de x dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$

f. Inéquations

La résolution s'effectue par lecture du cercle trigonométrique ou du tableau de variation des fonctions trigonométriques (voir 3°)

g. Formules d'addition et de duplication (Programme de Maths expertes)

Pour tous réels a et b on a :

$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Et en particulier :

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$

3. Etude des fonctions trigonométriques

a. Dérivabilité en zéro

Activité 2 p 316.

Limites à connaître : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0$

Soit $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$ définies sur $\mathbf{R}$.
Les fonctions f et g sont dérivables en 0, et : $f'(0) = 1$, $g'(0) = 1$

b. Fonctions dérivées

Soit $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$ définies sur **R**.
Les fonctions f et g sont dérivables sur **R**, et : $f'(x) = \cos(x)$, $g'(x) = -\sin(x)$
(Dém : Utilisation des formules d'addition et de la dérivabilité en 0)

c. Fonction sinus

$f(x) = \sin(x)$. f est définie sur **R**.
f est impaire et périodique de période 2π, il suffit donc de l'étudier sur $[0; \pi]$ puis procéder par symétrie centrale de centre O et par translations successives de vecteurs $2\pi\vec{\imath}$ et $-2\pi\vec{\imath}$.
f est dérivable sur **R** et $f'(x) = \cos(x)$.

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

d. Fonction cosinus

$g(x) = \cos(x)$. est définie sur **R**.
g est paire et périodique de période 2π, il suffit donc de l'étudier sur $[0; \pi]$ puis procéder par symétrie axiale d'axe (Oy) et par translations successives de vecteurs $2\pi\vec{\imath}$ et $-2\pi\vec{\imath}$.
g est dérivable sur **R** et $g'(x) = -\sin(x)$.

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
$g'(x)$	0		$+$		0		$-$		0
$g(x)$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

e. Fonction tangente (Hors Programme)

$h(x) = \tan(x)$. h est définie sur $\mathbf{R}\backslash\{{}^{\pi}/_{2} + k\pi\}_{k\in\mathbf{Z}}$.
h est impaire et périodique de période π, il suffit donc de l'étudier sur $[0; {}^{\pi}/_{2}[$ puis procéder par symétrie centrale de centre O et par translations successives de vecteurs $\pi\vec{\imath}$ et $-\pi\vec{\imath}$.

h est dérivable sur **R** et $h'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
$h'(x)$		$+$	‖		$+$		‖	$+$	
$h(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

f. Fonctions sinusoïdales

On appelle fonction sinusoïdale, toute fonction définie sur **R** pouvant s'écrire :

$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, où A, ω et φ sont des constantes réelles ($A > 0$ et $\omega > 0$)

On nomme :

A : l'amplitude (la valeur du maximum de f)
ω : la pulsation (en lien avec la période de f)
φ : la phase à l'origine (à déterminer avec $f(0)$ et une autre valeur)

Propriété : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

<u>Remarque</u> : On peut aussi utiliser la fonction cosinus car $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

<u>Attention</u> : Pour dériver une fonction sinusoïdale, utiliser la dérivée d'une composée…