Chap 8. Primitives et équations différentielles

Livre p 333 – Chap 11. Primitives et équations différentielles

1. Primitives

a. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

b. Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle. (Méthode d'Euler)

c. Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I, alors toute primitive F_k de f sur I peut s'écrire : $F_k(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle.
Soit $x_0 \in$ I et $y_0 \in \mathbf{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que : $F(x_0) = y_0$.

d. Primitives et opérations usuelles

Rappel : Fonctions usuelles :

$f(x)$	f définie sur	f dérivable sur	$f'(x)$
$ax + b$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	a
x^2	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$2x$
x^3	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$3x^2$
x^n	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$	$\mathbf{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	e^x
$\ln(x)$	$]0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$\frac{1}{x}$

Seules les dérivées des opérations suivantes sont facilement reconnaissables :

$(k \times f)' = k \times f'$.

$(u + v)' = u' + v'$.

$(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$

En particulier :

$(u^n)' = n\, u'\, u^{n-1}$.

$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$.

$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$(e^u)' = u'\, u$

Ne pas chercher à reconnaitre la dérivée d'un produit ou d'un quotient !

2. Equations différentielles

a. Définition

On appelle équation différentielle sur un intervalle I une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable sur I, souvent notée y (sous entendue de la variable x), dans laquelle apparait la dérivée ou les dérivées successives de y et éventuellement la variable x.

b. Equation différentielle linéaire homogène à coefficients constants du premier ordre

Soit a une constante réelle et (E) l'équation différentielle : $y' - ay = 0$ sur $\mathbf{R}$.
Les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme : $f(x) = C\, e^{ax}$ où C est une constante réelle.
Remarque :
Pour $a = 0$: Les seules fonctions dérivables ayant une dérivée nulle sont les fonctions constantes.
Propriété :
Soient x_0 et y_0 deux réels, il existe alors une unique solution de (E) telle que $f(x_0) = y_0$.

c. Equation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre avec un second membre constant

Soit a et b deux constantes réelles et (E) l'équation différentielle : $y' - ay = b$ sur $\mathbf{R}$.
Les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme : $f(x) = C\, e^{ax} + y_P(x)$
où C est une constante réelle et y_P est une solution particulière de (E).
Solution particulière :

- Pour $a = 0$, on peut chercher une solution affine, on trouve alors : $y_P(x) = bx$, donc :
  donc les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme : $f(x) = C + bx$.
- pour $a \neq 0$, on peut chercher une solution constante : on trouve alors : $y_P(x) = -\frac{b}{a}$
  donc les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme : $f(x) = C\, e^{ax} - \frac{b}{a}$.

Attention :
Dans le cas où le second membre n'est pas constant, c'est-à-dire que b est une fonction et non un réel, les solutions sont toujours de la forme : $f(x) = C\, e^{ax} + y_P(x)$ mais la fonction y_P est plus difficile à trouver !
Propriété :
Soient x_0 et y_0 deux réels, il existe alors une unique solution de (E) telle que $f(x_0) = y_0$.