

Chap 8. Primitives et équations différentielles

Livre p 333 – Chap 11. Primitives et équations différentielles

1. Primitives

a. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I , toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

b. Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle. (Méthode d'Euler)

c. Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Si F est une primitive de f sur I , alors toute primitive F_k de f sur I peut s'écrire : $F_k(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle.

Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbf{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que : $F(x_0) = y_0$.

d. Primitives et opérations usuelles

Seules les dérivées des opérations suivantes sont facilement reconnaissables :

$$(k \times f)' = k \times f'.$$

$$(u + v)' = u' + v'.$$

$$(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v).$$

En particulier :

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}.$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}.$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Ne pas chercher à reconnaître la dérivée d'un produit ou d'un quotient !

2. Equations différentielles

a. Définition

On appelle équation différentielle sur un intervalle I une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable sur I , souvent notée y (sous entendue de la variable x), dans laquelle apparaît la dérivée ou les dérivées successives de y et éventuellement la variable x .

b. Equation différentielle linéaire homogène à coefficients constants du premier ordre

Soit a une constante réelle et (E) l'équation différentielle : $y' - ay = 0$ sur \mathbf{R} .

Les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme : $f(x) = C e^{ax}$ où C est une constante réelle.

Remarque :

Pour $a = 0$: Les seules fonctions dérivables ayant une dérivée nulle sont les fonctions constantes.

Propriété :

Soient x_0 et y_0 deux réels, il existe alors une unique solution de (E) telle que $f(x_0) = y_0$.

c. Equation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre avec un second membre constant

Soit a et b deux constantes réelles et (E) l'équation différentielle : $y' - ay = b$ sur \mathbf{R} .

Les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme : $f(x) = C e^{ax} + y_p(x)$

où C est une constante réelle et y_p est une solution particulière de (E) .

Solution particulière :

- Pour $a = 0$, on peut chercher une solution affine, on trouve alors : $y_p(x) = bx$, donc :
donc les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme : $f(x) = C + bx$.
- pour $a \neq 0$, on peut chercher une solution constante : on trouve alors : $y_p(x) = -\frac{b}{a}$
donc les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme : $f(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}$.

Attention :

Dans le cas où le second membre n'est pas constant, c'est-à-dire que b est une fonction et non un réel, les solutions sont toujours de la forme : $f(x) = C e^{ax} + y_p(x)$ mais la fonction y_p est plus difficile à trouver !

Propriété :

Soient x_0 et y_0 deux réels, il existe alors une unique solution de (E) telle que $f(x_0) = y_0$.