Chap 7. Orthogonalité et distances dans l'espace

Livre p 89 – Chap 3. Orthogonalité et distances dans l'espace
Livre p 119 – Chap 4. Représentations paramétriques et équations cartésiennes (2ème partie)

1. Rappel : Produit scalaire dans le plan

a. Définition 1

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

b. Définition 2

Si on a : $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ dans une base orthonormée du plan, alors : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

c. Définition 3

Soit : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors : $\vec{u}.\vec{v} = 0$, sinon on note H le projeté orthogonal de C sur (AB) :

si A = H, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$,
si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens, alors : $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AH$.
si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires, alors : $\vec{u}.\vec{v} = -AB \times AH$.

d. Définition 4

Soit : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors : $\vec{u}.\vec{v} = 0$, sinon : $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos(B\hat{A}C)$

e. Propriété

Les quatre définitions précédentes sont équivalentes.

2. Produit scalaire dans l'espace

a. Définition

Soit : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Trois points sont nécessairement coplanaires, on définit donc :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans un plan (P) contenant A, B et C.

b. Propriétés

Carré scalaire : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
Symétrie : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
Bilinéarité : $(k\vec{u}).\vec{v} = k\,(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.(k\vec{v})$
$(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

c. Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $\vec{u}.\vec{v} = 0$

d. Base orthonormée de l'espace

Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est dite orthonormée si et seulement si :

$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et que $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\|$

e. Expression du produit scalaire dans une base orthonormée de l'espace

Si on a : $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ dans une base orthonormée du plan, alors : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

f. Norme et distance

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

AB = $\sqrt{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})^2 + (z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})^2}$

g. Identités remarquables

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$,
  donc : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ c.à.d. : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AD^2 - AB^2 - AC^2)$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$,
  donc : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ c.à.d. : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2)$
  En additionnant les deux, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ c.à.d. : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(AD^2 - CB^2)$
- $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

h. Angle non orienté dans l'espace

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

3. Droites et plans orthogonaux

a. Droites orthogonales

(*D*) la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ et (*D'*) la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{v}$.
(*D*) et (*D'*) sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
Remarque : Si de plus elles sont sécantes (coplanaires) on dit qu'elles sont perpendiculaires.
Propriétés :
Soient (*D*) et (*D'*) deux droites parallèles, si (Δ) est orthogonales à (*D*) alors (Δ) est orthogonales à (*D'*).
Soient (*D*) et (*D'*) deux droites orthogonales, si (Δ) est parallèle à (*D*) alors (Δ) est orthogonales à (*D'*).

b. Droite orthogonale à un plan

(*D*) la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ et (*P*) le plan passant par B de base $(\vec{v}\,;\vec{w})$.
(*D*) est orthogonale à (*P*) si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$.
Propriétés :
Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

c. Vecteur normal à un plan

Soit (*P*) le plan passant par A de base $(\vec{u}\,;\vec{v})$.
On appelle vecteur normal au plan (*P*) tout vecteur $\vec{n}$ non nul, orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

d. Plans orthogonaux

Deux plans sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

e. Projection orthogonale sur un plan

Soit (*P*) le plan passant par A de base $(\vec{u}\,;\vec{v})$. Pour tout point M de l'espace, on définit son projeté orthogonal sur le plan (*P*) comme étant l'unique point M' intersection du plan (*P*) avec la droite orthogonale à (*P*) passant par M.

f. Projection orthogonale sur une droite

Soit (*D*) la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$. Pour tout point M de l'espace, on définit son projeté orthogonal sur la droite (*D*) comme étant l'unique point M' intersection de la droite (*D*) avec le plan orthogonal à (*D*) passant par M.

4. Equation cartésienne d'un plan

a. Equation cartésienne d'un plan

Soit A(x_A ; y_A ; z_A) un point et $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur non nul.
Soit (*P*) le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$.
C'est-à-dire : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$, d'où : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$
Ce qui équivaut à : $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$.
Cette équation est appelée : équation cartésienne du plan (*P*)

b. Demi-espace (*Hors Programme*)

Le plan (*P*) d'équation $ax + by + cz + d = 0$ partage l'espace en deux demi-espace d'inéquations :
(E_1) : $ax + by + cz + d < 0$ et (E_2) : $ax + by + cz + d > 0$.

c. Plan médiateur

Soit A et B deux points distincts de l'espace, le plan médiateur du segment [AB] est l'ensemble des points équidistants de A et de B.
Propriété : le plan médiateur du segment [AB] est le plan orthogonal à (AB) passant par I, milieu de [AB].

d. Intersections de droites et plans

- Intersection de deux droites : Système de 6 équations à 5 inconnues qui se ramène facilement à 3 équations à 2 inconnues
- Intersection d'une droite et d'un plan : Système de 4 équations à 4 inconnues qui se ramène facilement à 1 équation à 1 inconnue.
- Intersection de deux plans : Système de 2 équations à 3 inconnues qu'on peut évoluer en 3 équations à 4 inconnues !
- Intersection de trois plans : Système de 3 équations à 3 inconnues. (Méthode du pivot de Gauss)

e. Distance d'un point à un plan

La distance d'un point quelconque A de l'espace à un plan (*P*), est la distance AA' où A' est le projeté orthogonal de A sur (*P*), c'est la plus courte distance entre A et un point du plan (*P*).
Propriété : (*Hors Programme*)
Si on a A(x_A ; y_A ; z_A) et (*P*) : $ax + by + cz + d = 0$, alors : $d(A, (P)) = AA' = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
Dém. : $|\overrightarrow{AA'}.\vec{n}| = AA' \times \|\vec{n}\|$ car $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{n}|$ sont colinéaires, de plus $ax_{A'} + by_{A'} + cz_{A'} + d = 0$.

f. Distance d'un point à une droite

La distance d'un point A quelconque A de l'espace à une droite (*D*), est la distance AA' où A' est le projeté orthogonal de A sur (*D*), c'est la plus courte distance entre A et un point de la droite (*D*).

g. Equation cartésienne d'une sphère (*Hors Programme*)

La sphère de centre $\Omega(x_\Omega\,;\,y_\Omega\,;\,z_\Omega)$ et de rayon R est l'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que :
$\Omega M = R^2$, c'est-à-dire : $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$.