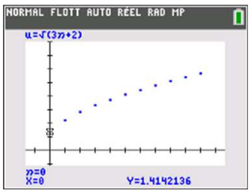
Chap 1. Suites

Livre p 153 – Chap 5. Suites

1. Rappels de 1ère : Généralités

a. Définitions

Fonction de **N** dans **R**. u_n se lit « u indice n ».
Forme explicite : $u_n = f(n)$, forme récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$
Nuage de points : n en abscisse et u_n en ordonnée.
Notation : u, (u_n) ou $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
Utilisation de la calculatrice. (Format : « Heure pour le graphique »)



b. Monotonie

- Une suite est croissante à partir d'un certain rang n_0 si et seulement si :
  Pour tout entier $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq u_{n+1}$.
- Une suite est décroissante à partir d'un certain rang n_0 si et seulement si :
  Pour tout entier $n \geq n_0$, on a : $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite est monotone à partir d'un certain rang n_0, si elle est croissante (ou décroissante) à partir d'un certain rang n_0.

Remarque : Une suite est strictement monotone si elle est strictement croissante (ou strictement décroissante) à partir d'un certain rang n_0. (remplacer les « $\leq$ » par des « $<$ »)
Méthode : Recherche du signe de : $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
Propriété : Comparaison du quotient u_{n+1}/u_n avec 1 pour les suites strictement positives.
Propriété : Lien avec la fonction dans le cas d'une forme explicite (Attention : pas de réciproque !)

c. Minorant et majorant

- Soit $m \in \mathbf{R}$, on dit que u est minorée par m si et seulement si, pour tout entier n, on a : $m \leq u_n$.
- Soit $M \in \mathbf{R}$, on dit que u est majorée par M si et seulement si, pour tout entier n, on a : $u_n \leq M$.
- On dit que u est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée.

2. Rappels de 1ère : Suites arithmétiques

a. Définition

Soit r un réel, la suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison r vérifie :
pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + r$.

b. Terme général

Pour tout entier n : $u_n = u_0 + nr$ et plus généralement : $u_n = u_p + (n - p)r$, en particulier : $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

c. Monotonie

- Si $r = 0$: u est constante.
- Si $r > 0$: u est strictement croissante.
- Si $r < 0$: u est strictement décroissante.

d. Somme des $n + 1$ premiers termes

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$

En particulier : $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3. Rappels de 1ère : Suites géométriques

a. Définition

Soit q un réel non nul, la suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q vérifie :

pour tout entier n : $v_{n+1} = q \times v_n$.

b. Terme général

Pour tout entier n : $v_n = v_0 \times q^n$ et plus généralement : $v_n = v_p \times q^{n-p}$, en particulier : $v_n = v_1 \times q^{n-1}$.

c. Monotonie

Soit $v_0 \neq 0$ et $q \neq 0$.

- Si $q = 1$: v est constante.
- Si $1 < q$: Si $v_0 > 0$: v est strictement croissante.
Si $v_0 < 0$: v est strictement décroissante.
- Si $0 < q < 1$: Si $v_0 > 0$: v est strictement décroissante.
Si $v_0 < 0$: v est strictement croissante.
- Si $q < 0$: v alterne entre des valeurs positives et négatives, elle n'est donc pas monotone.

d. Somme des $n + 1$ premiers termes

Si $q \neq 1$, $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

En particulier : $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

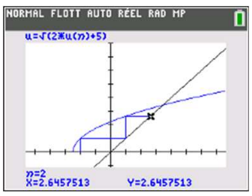
4. La récurrence

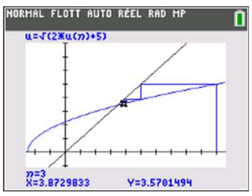
a. Construction des premiers termes

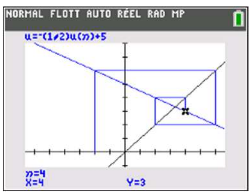
$u_{n+1} = f(u_n)$. Utilisation de la calculatrice (Format « Toile » pour le graphique)

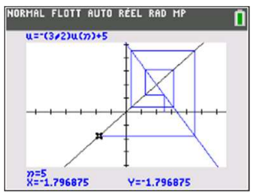
- $A_0(u_0\,;\,0)$ sur l'axe des abscisses
- $B_0(u_0\,;\,u_1)$ sur la courbe (C_f) car $u_1 = f(u_0)$
- $C_0(u_1\,;\,u_1)$ sur la droite (Δ) d'équation $y = x$
- $A_1(u_1\,;\,0)$ sur l'axe des abscisses
- $B_1(u_1\,;\,u_2)$ sur la courbe (C_f) car $u_2 = f(u_1)$
- $C_1(u_2\,;\,u_2)$ sur la droite (Δ) d'équation $y = x$

Attention : Si f est croissante, on trace un escalier (qui monte ou qui descend)
Si f est décroissante, on trace un escargot (vers l'intérieur ou vers l'extérieur)









b. Raisonnement par récurrence

Soit P_n une proposition dépendant d'un entier n.

- **Initialisation** : On vérifie que la propriété P_n est vraie pour la première valeur de n.
- **Hérédité** : Supposons que la propriété P_n soit vraie pour une valeur de $n \in \mathbf{N}$ quelconque, démontrons qu'alors la propriété P_{n+1} est vraie.
- **Conclusion** : Pour tout entier n, on peut maintenant affirmer que la propriété P_n est vraie.

Exemples : Domino Day, 110 m haies, somme des carrés (n° 14 p 159)

5. Limite d'une suite

a. Suite convergente

Soit ℓ un réel et u une suite, on dit que u converge vers ℓ si et seulement si :

Définition :

Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les éléments de la suite à partir d'un certain rang n_0.

Définition équivalente :

Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les éléments de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Propriété : Les suites (k/n), (k/n^2), $(k/\sqrt{n})$ et (ke^{-n}) convergent vers 0.

b. Suite divergente

Toute suite non convergente est dite divergente.

Cas particulier :

• Suites divergentes vers $+\infty$: Tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 (ou « tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux »)

Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

• Suites divergentes vers $-\infty$: Tout intervalle de la forme $]-\infty\,; A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 (ou « tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux »)

Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Propriété : Les suites (kn), (kn^2), $(k\sqrt{n})$ et (ke^n) divergent vers $+\infty$ si $k > 0$ et vers $-\infty$ si $k < 0$.

c. Recherche de seuil

Exercices classiques : (Algorithmique et programmation de la calculatrice)

Pour un entier p donné, chercher le plus petit entier n tel que $|u_n - \ell| < 10^{-p}$ pour une suite convergente.

Pour un entier p donné, chercher le plus petit entier n tel que $u_n > 10^p$ pour une suite divergente vers $+\infty$.

6. Limites et opérations

a. Somme et différence

Tableau pour la somme :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_1	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ_2	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$\ell_1+\ell_2$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**? ? ?**	$+\infty$

Attention : « **? ? ?** » signifie qu'il faut écrire l'expression de la somme autrement pour trouver la limite…

Tableau pour l'opposé :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ_1	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n =$	$-\ell_1$	$+\infty$	$-\infty$

Différence : $u - v = u + (-v)$.

b. Produit et quotient

Tableau pour le produit.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ_1	ℓ_1 $(\ell_1<0)$	ℓ_1 $(\ell_1<0)$	ℓ_1 $(\ell_1>0)$	ℓ_1 $(\ell_1>0)$	0	0	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ_2	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$\ell_1\times\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**? ? ?**	**? ? ?**	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Attention : « **? ? ?** » signifie qu'il faut écrire l'expression du produit autrement pour trouver la limite…

Tableau pour l'inverse.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ_1 ($\ell_1 \neq 0$)	0 ($u_n < 0$)	0 ($u_n > 0$)	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} =$	$1/\ell_1$	$-\infty$	$+\infty$	0	0

Quotient : $u / v = u \times (1/v)$.

c. Comment lever une indétermination ?

- Factoriser (en particulier par le terme de plus haut degré)
- Développer,
- Utiliser une expression conjuguée : Faire apparaître $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- Utiliser un des théorèmes vus dans la partie suivante !

7. Théorèmes sur les limites

a. Théorèmes de comparaison

- Théorème de minoration :
  Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang n_0 et que u diverge vers $+\infty$ alors v diverge vers $+\infty$.
- Théorème de majoration :
  Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang n_0 et que v diverge vers $-\infty$ alors u diverge vers $-\infty$.

b. Théorème d'encadrement

- Théorème des gendarmes :
  Si $u_n < v_n < w_n$ à partir d'un certain rang n_0 et que u et w converge vers la même limite ℓ alors v converge vers ℓ.

c. Théorèmes sur les suites monotones

Toute suite croissante et majorée est convergente. (Mais on ne sait pas vers quelle limite !)
Toute suite décroissante et minorée est convergente. (Mais on ne sait pas vers quelle limite !)
Remarque : Toute suite croissante non majorée est divergente.
Toute suite décroissante non minorée est divergente.

d. Cas des suites arithmétiques

- Si $r > 0$, u diverge vers $+\infty$,
- Si $r < 0$, u diverge vers $-\infty$.

e. Cas des suites géométriques

- Si $1 < q$: Si $v_0 > 0$: v diverge vers $+\infty$ (Démonstration : $(1 + a)^n \geq 1 + na$)
  si $v_0 < 0$: v diverge vers $-\infty$.
- Si $-1 < q < 1$: v converge vers 0.
- Si $q \leq -1$: v diverge (mais : ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$).

f. Théorème du point fixe (Voir Ch. 4)

Soit $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si f est continue (voir Ch. 3) et que u converge vers ℓ, alors ℓ est solution de l'équation : $f(x) = x$.