

1 Approche historique

■ Équations du troisième degré

Au XVI^e siècle, des mathématiciens italiens de la Renaissance travaillèrent sur la résolution des équations du troisième degré.

Afin de calculer des solutions, réelles pour certaines, ils furent amenés à introduire des nombres non réels.

1 Formule de CARDAN

En 1545, Jérôme CARDAN publie l'*Ars Magna*, dans lequel il fournit des formules de résolution d'une équation de la forme $x^3 = px + q$, avec p et q entiers strictement positifs.

Il développe et complète des méthodes empruntées à Nicolo TARTAGLIA et découvre que :

si $4p^3 - 27q^2 \leq 0$,
alors le réel positif $\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{4 \times 27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{4 \times 27}}}$ est solution de l'équation.

Dans cette formule, le nombre noté $\sqrt[3]{x}$, pour x dans $[0 ; +\infty[$, est le nombre positif qui, élevé au cube, donne x . On l'appelle **racine cubique** de x .

a) Vérifier que l'équation $x^3 = 15x + 4$ admet une solution entière positive a .

b) En factorisant $x^3 - 15x - 4$ par $(x - a)$, achever la résolution.

2 L'audace de BOMBELLI

La formule de CARDAN appliquée à l'équation précédente fait apparaître la racine carrée du nombre strictement négatif : -121 .

En 1572, afin de tenter de rendre générale la méthode de CARDAN, Raphaël BOMBELLI introduit un nombre *più di meno*, noté i en 1777 par EULER, et vérifiant $i^2 = -1$.

Ainsi $-121 = 121 \times (-1)$ est le carré de $11i$.

a) En utilisant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$ et en remplaçant i^2 par -1 , montrer que :
 $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ et $(2 - i)^3 = 2 - 11i$.

b) Quelle est alors la solution réelle donnée par la formule de CARDAN ?

Par l'intermédiaire de nombres nouveaux, BOMBELLI retrouve une des solutions réelles de l'équation. L'introduction du nombre i semble alors justifiée algébriquement.

Conjointement, il énonce les règles de calcul sur ces nombres.

L'apparition au XVI^e siècle de ces nouveaux nombres entraîna de vives polémiques.

En 1637, DESCARTES leur donna le nom d'**imaginaires**. Il fallut attendre deux siècles pour qu'ils obtiennent de la communauté mathématique un réel statut.

■ Représentation géométrique

À la fin du XVIII^e siècle et au début du XIX^e, WESSEL et ARGAND proposent de représenter le nombre imaginaire $x + iy$, avec x et y réels, par le point de coordonnées $(x ; y)$ dans le plan muni d'un repère orthonormal.

En 1811, GAUSS écrit :

« ...de même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où chaque point déterminé par son abscisse x et son ordonnée y représente en même temps la quantité $x + iy$. »