

$\Sigma\Sigma\Sigma$ Opérations sur les sommes $\Sigma\Sigma\Sigma$

- **Signification avec des pointillés :** $\sum_{k=0}^n x_k = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$.
- **Extraction du premier ou dernier terme :** $\sum_{k=0}^n x_k = x_0 + \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k + x_n$.
- **Scindement en deux sommes :** $\sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^p x_k + \sum_{k=p+1}^n x_k$.
- **Changement du nom de la variable :** $\sum_{k=0}^n x_k = \sum_{i=0}^n x_i$.
- **Changement des bornes ou de l'ordre :** $\sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=1}^{n+1} x_{k-1} = \sum_{k=0}^n x_{n-k}$.
- **Associativité :** $\sum_{k=0}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=0}^n x_k + \sum_{k=0}^n y_k$.
- **Factorisation :** $\sum_{k=0}^n a x_k = a \sum_{k=0}^n x_k$ (où a ne dépend pas de k)

Remarque : Il existe aussi une notation comparable pour les produits. $\prod_{k=0}^n x_k = x_0 \times x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$.

Exemple d'utilisation : Démonstration du binôme de Newton :

Soit P_n la proposition : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : Propriété vraie au rang $n=0$ car $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$

Hérédité : Supposons P_n vraie pour un entier n fixé, alors :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \right] + b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} + b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \quad \text{donc } P_{n+1} \text{ alors vraie.}$$

Conclusion : P_n est vraie pour tout entier n .