

Nombres complexes

Point de vue algébrique et polynômes

(Magnard Ch.1 p 10)

I / Ensemble $\mathbf{C}$.

1°) *Introduction.*

- XVI^e siècle : G. Cardan et R. Bombelli
- XVII^e siècle : R. Descartes
- XVIII^e siècle : L. Euler
- XIX^e siècle : F. Gauss

2°) *Définition.*

On note $\mathbf{C}$, l'ensemble des nombres complexes qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbf{R}$ est inclus dans $\mathbf{C}$
- On note i un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$, alors i appartient à $\mathbf{C}$
- $\mathbf{C}$ possède deux opérations internes héritées de $\mathbf{R}$: l'addition et la multiplication

Remarque : Attention, contrairement à $\mathbf{R}$, l'ensemble $\mathbf{C}$ ne possède pas de relation d'ordre.

3°) *Forme algébrique d'un nombre complexe.*

Tout nombre complexe z peut s'écrire, de manière unique : $z = a + i b$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}$

- Cette écriture est appelée : forme algébrique du nombre complexe z
- Le nombre réel a est appelé : partie réelle du nombre complexe z et on note $a = \operatorname{Re}(z)$
- Le nombre réel b est appelé : partie imaginaire du nombre complexe z et on note $b = \operatorname{Im}(z)$

Remarques :

- Si $\operatorname{Im}(z) = 0$ alors z est un nombre réel.
L'ensemble des nombres complexes z tels que $\operatorname{Im}(z) = 0$ est $\mathbf{R}$.
- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$ alors z est appelé imaginaire pur.
L'ensemble des nombres complexes z tels que $\operatorname{Re}(z) = 0$ est noté $i \mathbf{R}$.

4°) *Égalité de deux nombres complexes.*

Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$z = z' \text{ équivaut à : } \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$$

Remarque : $z = 0$ équivaut à : $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) = 0$

II / Opérations dans $\mathbb{C}$.

1°) Somme, opposé et différence.

Soit $z = a + i b$ et $z' = a' + i b'$ avec a, b, a', b' quatre réels :

- $z + z' = (a + a') + i (b + b')$
- $-z' = (-a') + i (-b')$
- $z - z' = z + (-z') = (a - a') + i (b - b')$

Remarque : Ne pas apprendre par cœur ces formules mais utiliser les propriétés classiques de l'addition et de la soustraction.

2°) Produit, inverse, quotient et puissances

Soit $z = a + i b$ et $z' = a' + i b'$ avec a, b, a', b' quatre réels tels que $(a' ; b') \neq (0 ; 0)$:

- $z \times z' = (aa' - bb') + i (ab' + ba')$
- $\frac{1}{z'} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{-b'}{a'^2 + b'^2}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{aa' - bb'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{-ab' + ba'}{a'^2 + b'^2}$

Remarque : Ne pas apprendre par cœur ces formules mais utiliser les propriétés classiques de la multiplication et de la division, ainsi que la distributivité sans oublier que : $i^2 = -1$.

3°) Puissances

Pour tout nombre complexe z , on a :

- $z^0 = 1$
- $z^1 = z$
- $z^2 = z \times z$
- plus généralement, pour tout entier naturel n : $z^{n+1} = z \times z^n$.

Attention : Ne pas utiliser la racine carrée avec les nombres complexes...

4°) Propriétés.

Tout comme dans $\mathbb{R}$:

- 0 est l'élément neutre de l'addition et l'élément absorbant de la multiplication dans $\mathbb{C}$.
- 1 est l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{C}$.
- L'addition et la multiplication sont associatives et commutatives dans $\mathbb{C}$.

III / Module et conjugué d'un nombre complexe.

1°) *Conjugué.*

Soit $z = a + i b$ avec a, b deux réels :

On appelle conjugué du nombre complexe z le nombre complexe noté $\bar{z}$ et tel que : $\bar{z} = a - i b$.

Remarque : Le conjugué d'un nombre réel est lui-même.

2°) *Module.*

Soit $z = a + i b$ avec a, b deux réels :

On appelle module du nombre complexe z le nombre réel positif noté $|z|$ et tel que : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque : Le module d'un nombre réel est sa valeur absolue.

3°) *Calculatrice.*

Utilisation de la TI-83 Premium. Boite à outils : Nombres complexes

4°) *Propriétés.*

Pour tout nombre complexe z , on a :

- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ donc : $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ donc : $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- z est un réel équivaut à : $\bar{z} = z$
- z est un imaginaire pur équivaut à : $\bar{z} = -z$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z \times \bar{z} = |z|^2$

5°) *Opérations et conjugué.*

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{-z'} = -\bar{z}'$
- $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ pour tout n entier naturel

Et si de plus, $z' \neq 0$, on a :

- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

6°) *Opérations et module.*

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

Et si de plus, $z' \neq 0$, on a :

- $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Remarque : comme pour la valeur absolue, $|-z| = |z|$, et de plus $|\bar{z}| = |z|$

Attention : Pour la somme, c'est l'inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

IV / Équations du second degré à coefficients réels.

1°) Résolution.

(E) : $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbf{C}$, avec a, b et c réels ($a \neq 0$), on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta \geq 0$, pas de changements par rapport à $\mathbf{R}$:

Si $\Delta = 0$: une unique racine réelle double,

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

Si $\Delta > 0$: deux racines réelles différentes,

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées l'une de l'autre

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Attention : Si $\Delta < 0$, ne pas écrire $\sqrt{\Delta}$ mais $i\sqrt{|\Delta|}$.

2°) Factorisation.

(E) : $az^2 + bz + c = 0$ telle que (E) ait deux racines distinctes z_1 et z_2 complexes ou réelles ($\Delta \neq 0$)

Alors, on a : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Remarques : Si $\Delta < 0$, on a alors : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - \bar{z}_1)$

Si $\Delta = 0$, on a alors : $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$

3°) Coefficients.

(E) : $az^2 + bz + c = 0$ telle que (E) ait deux racines distinctes z_1 et z_2 complexes ou réelles ($\Delta \neq 0$)

Alors, on a : $az^2 + bz + c = a(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2)$

Remarque : Si $\Delta < 0$, on a alors : $az^2 + bz + c = a(z^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1)z + |z_1|^2)$

Réciproquement : Soit z_1 et z_2 deux nombres dont on connaît la somme S et le produit P

z_1 et z_2 sont alors les solutions de l'équation : $z^2 - Sz + P = 0$.

4°) Formule du binôme.

Soit a et b deux nombres complexes, pour tout entier naturel n , on a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Remarque : Utiliser le triangle de Pascal pour obtenir les valeurs des coefficients binomiaux

V / Polynômes.

1°) Définition d'un polynôme complexe à coefficients réels.

Soit n un entier naturel, on appelle polynôme complexe à coefficients réels de degré n toute expression pouvant s'écrire de la forme :

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0,$$

où $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ sont des constantes réelles tels que $c_n \neq 0$

2°) Racine d'un polynôme.

Soit P un polynôme complexe à coefficients réels, on appelle racine de P , tout nombre complexe a tel que : $P(a) = 0$.

3°) Factorisation de $z^n - a^n$.

Pour tout entier naturel n non nul et tout réel a , on peut écrire :

$$z^n - a^n = (z - a) Q(z) \quad \text{où } Q \text{ est un polynôme complexe à coefficients réels de degré } n - 1.$$

4°) Factorisation d'un polynôme quelconque.

Soit n un entier naturel non nul et P un polynôme complexe à coefficients réels de degré n .

Si a est une racine de P , alors il existe un polynôme complexe Q à coefficients réels de degré $n - 1$, tel que : $P(z) = (z - a) Q(z)$ pour tout complexe z .

5°) Propriété.

Tout polynôme complexe à coefficients réels de degré n admet au plus n racines distinctes.