# *Chap 3.* ***Booléens***

Livre p 275 – Chap 22 Circuits et logique booléenne

## 1. Algèbre de Boole

### a) Définition

Un booléen est une variable qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 (Faux, False) ou 1 (Vrai, True)
L'algèbre de Boole fut inventé par le mathématicien britannique George Boole (1815 – 1864).

### b) Table de vérité

Une table de vérité est un tableau représentant toutes les combinaisons de valeurs possibles pour une ou plusieurs variables, et la valeur associée pour une fonction donnée.

### c) Négation

L'opérateur « NOT » (Non) se note en plaçant un trait au-dessus de l'expression booléenne.
Remarque : On peut aussi écrire : « not(*a*) », « non(*a*) », « ¬*a* » ou « !*a* ».

| $a$ | $\bar{a}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

### d) Conjonction

L'opérateur « AND » (Et) se note comme une multiplication, par un point entre deux expressions booléennes.
Remarque : On peut aussi écrire : « *a* and *b* », « *a* et *b* », « *a*&*b* » ou « *a*∧*b* ».

| $a$ | $b$ | $a.b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

### e) Disjonction

L'opérateur « OR » (Ou) se note comme une addition, par un + entre deux expressions booléennes.
Remarque : On peut aussi écrire : « *a* or *b* », « *a* ou *b* », « *a*|*b* » ou « *a*∨*b* ».
Attention : Tout comme la multiplication est prioritaire sur l'addition, l'opérateur « AND » est prioritaire sur l'opérateur « OR » mais il vaut mieux utiliser des parenthèses : $a + b.c = a + (b.c)$

| $a$ | $b$ | $a+b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

### f) Autres opérateurs

Il existe d'autres opérateurs :

- L'opérateur « NAND » (Non–Et) : $\overline{a.b}$
- L'opérateur « NOR » (Non–Ou) : $\overline{a+b}$
- L'opérateur « XOR » (Ou exclusif) : $a \oplus b$

| $a$ | $b$ | $\overline{a.b}$ | $\overline{a+b}$ | $a \oplus b$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

## 2. Propriétés

### a. Eléments neutres

0 est l'élément neutre de l'opérateur « OR » : Pour tout *a*, $0 + a = a + 0 = a$
1 est l'élément neutre de l'opérateur « AND » : Pour tout *a*, $1.a = a.1 = a$

### b. Eléments absorbants

1 est l'élément absorbant de l'opérateur « OR » : Pour tout *a*, $1 + a = a + 1 = 1$
0 est l'élément absorbant de l'opérateur « AND » : Pour tout *a*, $0.a = a.0 = 0$

c. <u>Idempotence</u>

Pour tout $a$, $a + a = a$ et $a.a = a$

et plus généralement , $a + a + \ldots + a = a$ et $a.a.\ \ldots\ .a = a$

d. <u>Complémentarité</u>

Pour tout $a$, $\overline{(\bar{a})} = a$ $a + \bar{a} = 1$ et $a\ .\ \bar{a} = 0$

e. <u>Commutativité</u>

Pour tout $a$ et $b$, $a + b = b + a$ et $a.b = b.a$

f. <u>Associativité</u>

Pour tout $a$, $b$ et $c$, $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ et $a.(b.c) = (a.b).c = a.b.c$

g. <u>Distributivité</u>

Pour tout $a$, $b$ et $c$, $a.(b + c) = a.b + a.c$ et $(a + b).c = a.c + b.c$

et plus surprenant… $a + b.c = (a + b).(a + c)$ et $a.b + c = (a + c).(b + c)$

h. <u>Théorème de Morgan</u>

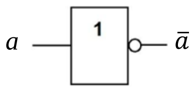
- 1ère loi de Morgan : Pour tout $a$ et $b$, $\overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$
- 2ème loi de Morgan : Pour tout $a$ et $b$, $\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$

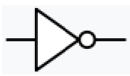
## 3. Portes logiques

a) <u>Électronique</u>

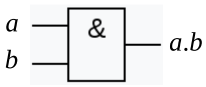
Les opérations réalisées dans un ordinateur sont réalisées à l'aide de portes logiques.

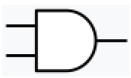
b) <u>Opérateur « NOT »</u>

Notation européenne : 

Notation américaine : 

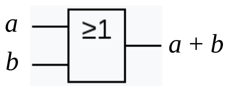
c) <u>Opérateur « AND »</u>

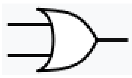
Notation européenne : 

Notation américaine : 

<u>Remarque</u> : Du fait de l'associativité de l'opérateur AND, on peut avoir plus de deux entrées

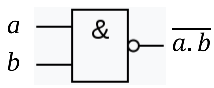
d) <u>Opérateur « OR »</u>

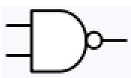
Notation européenne : 

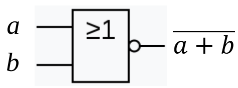
Notation américaine : 

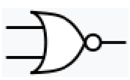
<u>Remarque</u> : Du fait de l'associativité de l'opérateur OR, on peut avoir plus de deux entrées

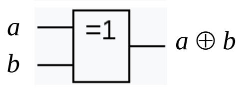
e) <u>Autres opérateurs</u>

NAND : Notation européenne : 

Notation américaine : 

NOR : Notation européenne : 

Notation américaine : 

XOR : Notation européenne : 

Notation américaine :