Jeudi 13 octobre 2016 Term S_4

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(6 points)*

1°) Pour tout nombre complexe z, on note : $P(z) = z^3 - (14 + 3i)\, z^2 + (65 + 42i)\, z - 195i$.

a) Montrer que P admet une unique racine imaginaire pure que l'on déterminera.
b) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout z : $P(z) = (z - 3i)\,(az^2 + bz + c)$.
c) On déduire toutes les racines de P.

2°) Pour tout nombre complexe z, on note : $Q(z) = z^2 - 8z - 9$.
Déterminer les racines de Q.

3°) On note A, B, C, D et E les images des cinq racines trouvées précédemment.
Placer ces cinq points dans le plan complexe.

4°) Montrer que A, B, C, D et E sont sur un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 2 *(4 points)*

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = 5i$. $\quad z_2 = -3 + 3i$. $\quad z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$. $\quad z_4 = -\pi$.

Exercice 3 *(8 points)*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{1+u_n}$.

1°) On a tracé **sur l'annexe** une partie de la courbe (C) d'équation : $y = 4 - \dfrac{4}{1+x}$

Placer sur l'axe des abscisses les points d'abscisse u_0, u_1, u_2 et u_3 en expliquant la méthode utilisée.

2°) Calculer u_1 et u_2.

3°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\quad 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

4°) En déduire que la suite u est convergente.

5°) Soit ℓ la limite de la suite u, montrer que ℓ est solution de l'équation : $\quad 4 - \dfrac{4}{1+x} = x$.

6°) En déduire la valeur de ℓ.

7°) On définit, pour tout entier naturel n, $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

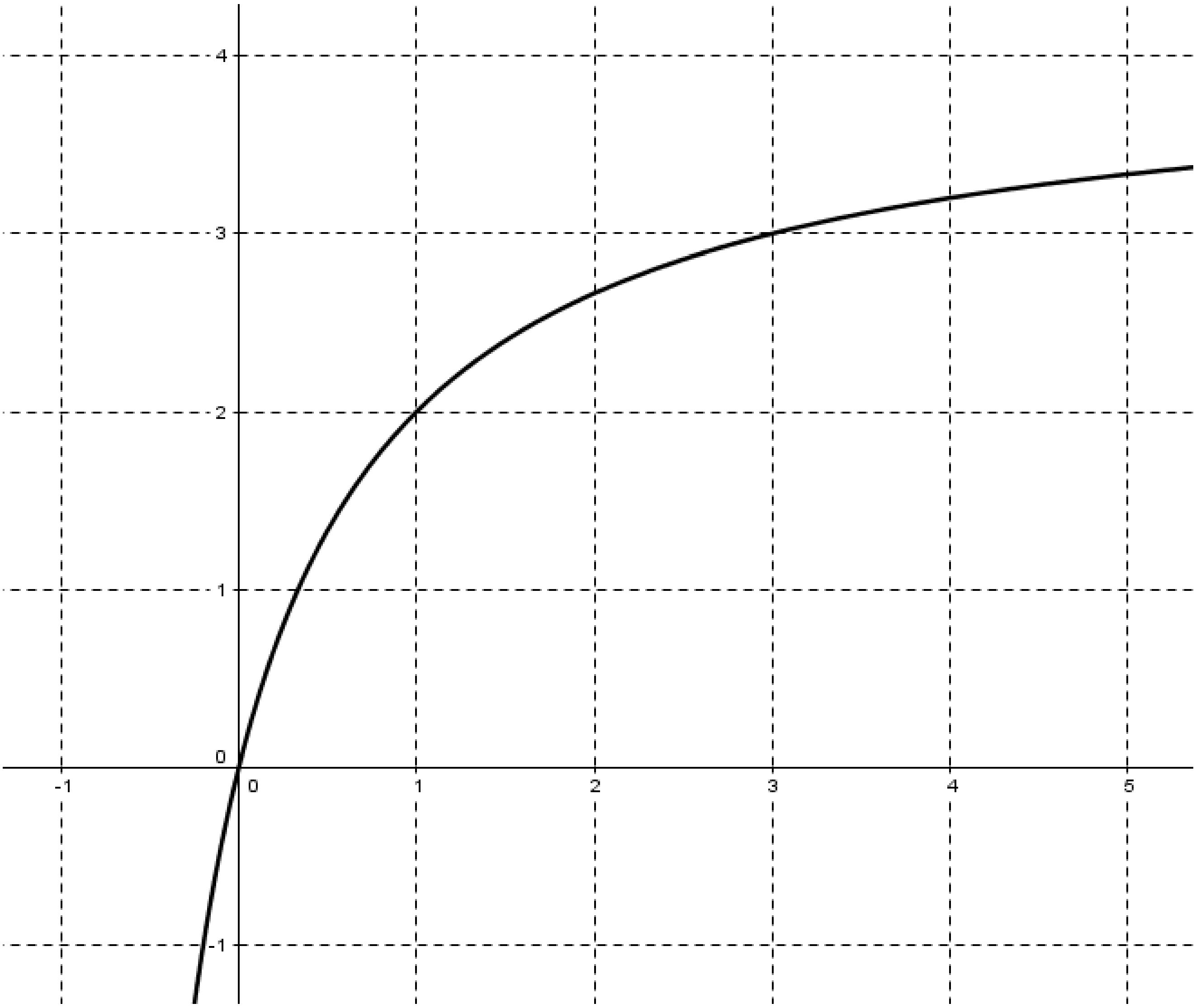
a) Compléter l'algorithme fourni **en annexe** afin qu'il permette de calculer la valeur de S_n lorsque l'utilisateur entre une valeur de n.
b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\quad S_n \geq n + 1$.
c) Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (S_n) ?

Exercice 4 *(2 points)*

Déterminer la limite de la suite définie sur **N** par : $\quad u_n = n + 1 - \sqrt{n^2 + 1}$.

NOM & Prénom : ………………………………………………………………………

Annexe



Variables :	n et k sont des entiers naturels u et s sont des réels
Entrée :	Saisir la valeur de n

Traitement :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur ………
	Pour k allant de ……… à ………
	        u prend la valeur 4 – 4/(1 + u)
	        s prend la valeur ………………
	Fin Pour

Sortie :	Afficher s