Mercredi 21 septembre 2016 Term S

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(9 points)*

Partie A

Cette année, Youssef a décidé de se mettre au sport.
Pour cela, il s'inscrit dans un club où il pratique l'escalade une fois par semaine, ce qui lui fait perdre 0,25 % de sa masse par séance.
Par ailleurs, son club d'escalade ayant un partenariat avec la pizzeria « d'à côté », il s'y réunit avec ses amis après chaque entraînement et profite de réductions sur les pizzas et les boissons. Cela a des conséquences : 200 g supplémentaires après chaque repas.

On note a_n sa masse, en kg, après n semaines (donc après n séances et repas).
Comme il pèse 70 kg au départ, on a $a_0 = 70$.

1) Calculer a_1 et a_2. Arrondir au gramme près.
2) Expliquer pourquoi on a, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}9975\, a_n + 0{,}2$.
3) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n = 80 - 10 \times 0{,}9975^n$.
4) a) Exprimer, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} - a_n$ en fonction de n.
   b) Que peut-on en déduire sur les variations de la suite (a_n) ?
5) Déterminer la limite de la suite (a_n).
   Que représente concrètement cette valeur ?

Partie B

Alban est inscrit au même club d'escalade que Youssef et fréquente la même pizzeria (le tout dans les mêmes conditions pour sa masse) et pèse 85 kg au départ.

On note b_n sa masse, en kg, après n semaines et on considère la suite (c_n) définie par :
$c_n = b_n - 80$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1) Exprimer, pour tout entier naturel n, b_{n+1} en fonction de b_n.
   Montrer que (c_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
2) En déduire, pour tout entier naturel n, c_n puis b_n en fonction de n.
3) En déduire la limite de (b_n).

Partie C

1) Commenter les résultats des parties A et B.
2) Quelles seront les masses de Alban et Youssef après 1 an ? Arrondir au gramme près.

<u>Exercice 2</u> *(5 points)*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous permettant d'afficher en sortie la valeur de u_n, sachant que la valeur de l'entier naturel n est entrée par l'utilisateur ?

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0 Pour i allant de ……. à ……. u prend la valeur …………………. Fin Pour
Sortie :	Afficher u

3) On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   a) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   b) On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

   Montrer que pour tout entier naturel n, $S_n = (n + 1)(n + 2)$.
   c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

<u>Exercice 3</u> *(6 points)*

1) Soit $z = 1 - 4i$ et $z' = 1 + i$, écrire sous forme algébrique les complexes suivants :
   a) $z_1 = z - z'^2$.
   b) $z_2 = \bar{z}\, z'$.
   c) $z_3 = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z'}$.
2) Résoudre dans **C** les équations suivantes. (On écrira les solutions sous forme algébrique)
   a) $(E_1) : 2i + 3z = (1 + i)\, z + 1$.
   b) $(E_2) : z - 1 = 2i + 3i\,\bar{z}$.
   c) $(E_3) : 3z^2 + \sqrt{3}\, z + 1 = 0$.