

Spécialité Mathématiques (1h15)**Exercice 1** (7 points)

Voici un extrait des tarifs de la poste en 2015-2016 :

- Timbre « vert » : 0,68 €
- Timbre « rouge » : 0,76 €
- Colis de 500 g : 3,70 €
- Colis de 3 kg : 5,60 €

Le but est de savoir si l'on peut affranchir de manière exacte un colis, avec uniquement des timbres « verts » et des timbres « rouges ».

On note x le nombre de timbres « verts » et y le nombre de timbres « rouges » à utiliser.

1°) a) Montrer que pour affranchir un colis de 500 g, il faut résoudre l'équation :

$$(E_1) : 34x + 38y = 185 \quad \text{dans } \mathbf{N}.$$

b) Conclure.

2°) a) Montrer que pour affranchir un colis de 3 kg, il faut résoudre l'équation :

$$(E_2) : 17x + 19y = 140 \quad \text{dans } \mathbf{N}.$$

b) Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, une solution particulière de l'équation :

$$(E'_2) : 17x + 19y = 1 \quad \text{dans } \mathbf{Z}.$$

c) En déduire que le couple (1260 ; -1120) est une solution particulière de l'équation (E₂) dans \mathbf{Z} .

d) Résoudre l'équation (E₂) dans \mathbf{Z} .

e) En déduire une résolution de l'équation (E₂) dans \mathbf{N} .

f) Conclure.

Exercice 2 (3 points)

Convertir $n = \overline{2016}$ de la base 7 à la base 6. (Indication : Passer par la base 10)

Exercice 3 (6 points)

Démontrer de deux façons différentes que pour tout entier naturel n , le nombre $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6.

1°) Par récurrence.

2°) En utilisant les congruences.

Exercice 4 (4 points)

Déterminer tous les entiers naturels x et y non nuls tels que :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(x, y) = 112 \\ x + y = 2016 \end{cases}$$