Jeudi 19 mai 2016 T°S_4

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1. *(10 points)*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points A(0 ; 1 ; –1) et B(–2 ; 2 ; –1).
- la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2) a) Montrer que les droites (AB) et *D* ne sont pas parallèles.
   b) Montrer que les droites (AB) et *D* ne sont pas sécantes.

Dans la suite de l'exercice, la lettre *u* désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite *D* de coordonnées (–2 + *u* ; 1 + *u* ; –1 – *u*).

3) Vérifier que le plan P d'équation $x + y - z - 3u = 0$ est orthogonal à la droite *D* et passe par le point M.
4) Montrer que le plan P et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées (–4 + 6*u* ; 3 – 3*u* ; –1).
5) a) Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite D.
   b) Existe-t-il une valeur du nombre réel *u* pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?
6) a) Exprimer MN^2 en fonction de *u*.
   b) En déduire la valeur du réel *u* pour laquelle la distance MN est minimale.

Exercice 2. *(10 points)*

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.

1) Démontrer, en utilisant la fonction densité de *X*, que pour tout réel *t* positif,
   $P(X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
2) Démontrer que, pour tous réels positifs *t* et *h*, $P_{(X \ge t)}(X \ge t + h) = P(X \ge h)$.
   Comment nomme-t-on cette propriété ?

Les parties B et C sont indépendantes.

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques.
Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut.
On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie B

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise.
On appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1) Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? (On donnera la valeur exacte et l'arrondi au dix-millième).
2) Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? (Arrondir au dix-millième).
3) Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie C

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$.
On suppose que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.

1) Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieur à 1000 heures (on donnera la valeur exacte et l'arrondi au centième) :
   a) si ce composant est défectueux ;
   b) si ce composant n'est pas défectueux.
   Arrondir les réponses au dix-millième.
2) Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant non défectueux soit supérieure à 2000 heures sachant qu'il fonctionne encore parfaitement après 1500 heures d'utilisation. (Arrondir au dix-millième)
3) Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.
   Démontrer que la probabilité que ce composant soit en état de marche après *t* heures de fonctionnement est :
   $$P(T > t) = 0{,}02 \times e^{-5\times 10^{-4} t} + 0{,}98 \times e^{-10^{-4} t}.$$
4) Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ? (Arrondir au dix-millième)