Mercredi 28 mars 2012 Term S

DEVOIR de Spécialité Mathématique (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(10 points)*

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) :

$$3x + 7y = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

a. Déterminer un couple (u ; v) d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.
En déduire une solution particulière (x_0 ; y_0) de l'équation (E).
b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de (E).

2. on considère l'équation notée (G) :

$$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

a. Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).
Démontrer que si (x ; y) est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).
b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7.	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Exercice 2 *(10 points)*

On considère un carré direct ABCD (c'est-à-dire un carré ABCD tel que $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ [2π]) de centre I. Soit J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [DA]. Γ_1 désigne le cercle de diamètre [AI] et Γ_2 désigne le cercle de diamètre [BK].

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que s(A) = I et s(B) = K.

2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s.

3. a. Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.
b. Soit E l'image du point I. Démontrer que E est le milieu du segment [ID].

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés.
(On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $(A ; \frac{1}{10}\overrightarrow{AB} ; \frac{1}{10}\overrightarrow{AD})$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.

2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe :

$$z' = \frac{i}{2}z + 5 + 5i.$$

3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.

4. Calculer l'affixe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.

5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) dont concourantes au point Ω.