Octobre 2011 Term S

Interrogation de Spécialité Mathématique (2h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(2 points)*

Justifier que $p = 127$ est un nombre premier.

Exercice 2 *(3 points)*

Soit n un entier naturel, on note $P(n) = 21n^3 - 74n^2 + 128$.
1°) Calculer P(2)
2°) En déduire une factorisation de $P(n)$.
3°) Pour quelle(s) valeur(s) de n, $P(n)$ est-il un nombre premier ?

Exercice 3 *(6,5 points)*

Partie A *(Restitution Organisée des Connaissances)*

1°) Rappeler la définition de la division euclidienne de a par b dans $\mathbf{N}$.
2°) Démontrer l'existence et l'unicité du couple (quotient, reste) dans cette définition.

Partie B *(Les trois questions sont indépendantes)*

1°) Le reste dans la division euclidienne d'un entier naturel n par 21 est égal à 18.
Déterminer le reste dans la division euclidienne de cet entier n par 7.
2°) On divise 100 par un entier naturel non nul d, le quotient est 7 et le reste est r.
Déterminer d et r.
3°) On divise 100 par un entier naturel n, le reste est 22.
Déterminer n.

Exercice 4 *(6 points)*

1°) Ecrire la décomposition en produit de facteurs premiers de 98.
En déduire le nombre de diviseurs positifs de 98.
2°) Ecrire la liste de tous les diviseurs positifs de 98.
3°) On rappelle que : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

a) Montrer que, pour tous les couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$, on a :
$(a^2 + ab + b^2) - (a - b) = (a - b)(a - b - 1) + 3ab$.
En déduire que, pour tous les couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ tels que $b < a$, on a :
$a - b \leq a^2 + ab + b^2$.

b) Montrer par l'absurde que, pour tous couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$,
si $(a^3 - b^3)$ est pair alors a et b ont même parité.
En déduire la parité de $(a - b)$ lorsque $(a^3 - b^3)$ est pair.

c) En déduire tous les couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ tels que : $a^3 - b^3 = 98$ et $b < a$.

Exercice 5 *(2,5 points)*

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6.