BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2012

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7 ou 9**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton, puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ».
L'événement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\mathrm{E}}$.
La probabilité d'un évènement E sera notée $p(\mathrm{E})$.

Partie A

1. Montrer que $p(\mathrm{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance $\mathrm{E}(X)$.
b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathrm{E}(X) < 0$.
Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.
Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

Exercice 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité mathématiques.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On prendra 2 cm pour unité graphique.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. **a.** Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b. Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Placer les points A, B et B'.

2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = (1 + i)z + 1.$$

a. Montrer que B a pour image B' par f.

b. Montrer que A est le seul point invariant par f.

c. Établir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\frac{z'-z}{i-z} = -i$.
Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
En déduire une méthode de construction de M' à partir de M, pour M distinct de A.

3. **a.** Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 2| = \sqrt{2}$.

b. Démontrer que $z' - 3 - 2i = (1 + i)(z - 2)$.
En déduire que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.

c. Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

Exercice 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 7 + \frac{7}{2}i$.

1. On considère la droite (d) d'équation $4x + 3y = 1$.
Démontrer que l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k + 1 ; -4k - 1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2 ; 3)$.

3. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe

$$z' = \frac{2}{3}iz + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i .$$

Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s.

4. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

a. Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n.

b. À partir de quel entier n le point B_n, appartient t-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?

c. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.

Exercice 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.
Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.
Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Proposition 1

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = -2y + e^{2x}$ sur $\mathbf{R}$.

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = ke^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x}, \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

Proposition 2

Toute suite non majorée diverge vers $+\infty$.

Proposition 3

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbf{R}$, a un réel et u la suite définie par :

$$u_0 = a \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Si f est croissante, alors u est croissante.

Proposition 4

Soit u et v les suites définies pour tout entier naturel n, par : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = -\sqrt{u_n}$.

Les suites u et v sont adjacentes.

Exercice 5 (6 points)

Commun à tous les candidats

Question de cours

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ tels que $a \leq b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \geq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx .$$

Partie A

1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1.

Calculer en fonction de x l'intégrale $\int_1^x (2-t)dt$.

2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1 ; +\infty[$, on a : $2 - t \leq \frac{1}{t}$.

3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leq \ln x.$$

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$.

Sur le graphique joint en annexe, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1 ; 4]$. On y a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.

1. **a.** Démontrer que $\int_1^4 h(x)dx = 0$.

b. Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.

2. On note (D) le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de (D) en unités d'aire.

FIG. 1 – Annexe (à rendre avec la copie)