Mercredi 11 avril 2012 Term S_4

DEVOIR de MATHEMATIQUES (2h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (9 *points*)

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.
Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.
Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.
Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.
Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\dfrac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,
- sur $\dfrac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 €,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».
On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».
On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.

a. Calculer les probabilités $p(\mathrm{V})$ et $p(\mathrm{J})$ des évènements respectifs V et J.

b. On note $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{R})$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{R})$ puis $p(\mathrm{R}\cap\mathrm{V})$.

c. Calculer $p(\mathrm{R})$.

d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que $p(X = -m)$ est 0,6.

c. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{140-51m}{80}.$$

d. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euros.
Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus.
Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geq 1$.
Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

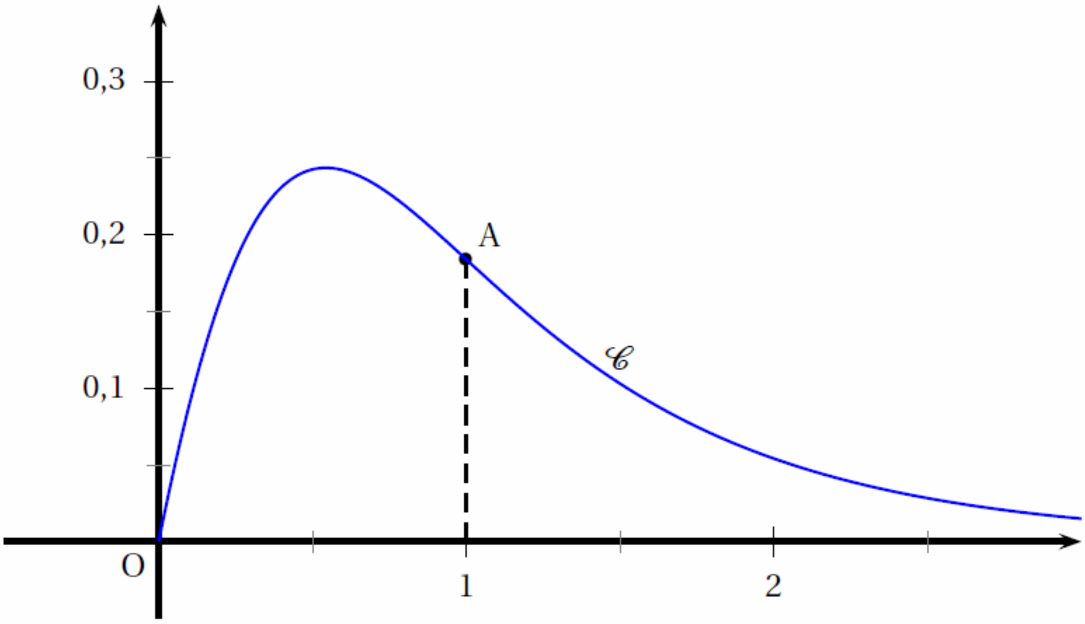
…/…

Exercice 2 (11 *points*)

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

La courbe (C), donnée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0 ; +\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0 ; +\infty[$.
La courbe (C) passe par les points O et $A(1 ; {}^{1}/_{2e})$ et, sur $[0 ; 1]$, elle est au-dessus du segment [OA].



1. Montrer que $\int_0^1 f'(x)dx = \frac{1}{2e}$.

2. Montrer que $\int_0^1 f(x)dx \geq \frac{1}{4e}$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.
Etablir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3. **a.** Montrer que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.
b. En déduire les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{2n} f(x)dx$

a. Montrer que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$.

c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.