Jeudi 16 février 2012 T°S_4

DEVOIR de Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (6 *points*)

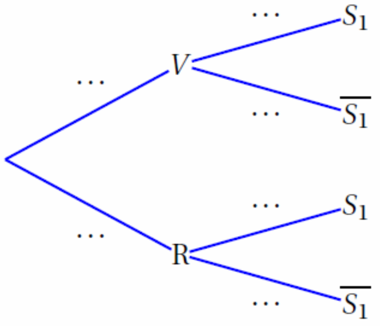
Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on le lance. On note :

– V l'évènement : « le dé tiré est vert »
– R l'évènement : « le dé tiré est rouge »
– S_1 l'évènement : « on obtient 6 au lancer du dé ».

1. On tire au hasard un dé et on effectue un lancer de celui-ci.

a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



b. Calculer la probabilité $P(S_1)$.

2. On tire au hasard un dé de l'urne. On lance ensuite ce dé n fois de suite. On note S_n l'évènement : « on obtient 6 à chacun des n lancers ».

a. Démontrer que :

$$P(S_n) = \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

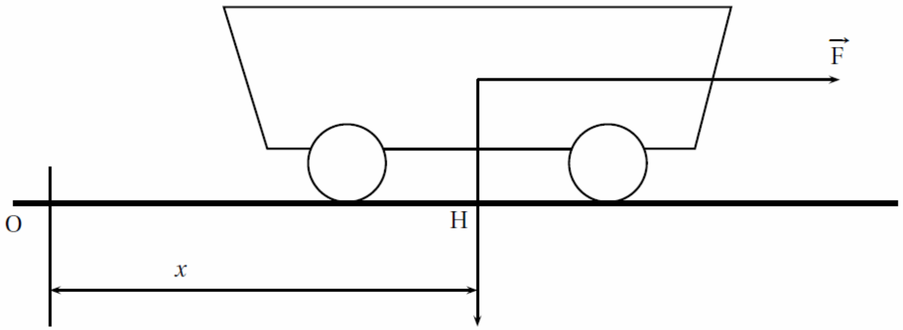
b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers.

Démontrer que :

$$p_n = \frac{1}{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$$

c. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $p_n \geq 0{,}999$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 2 (5,5 *points*)



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m^{-1}.s.

La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

(E) $\quad 25x' + 200x'' = 50$, où

x' est la dérivée de x par rapport au temps t ,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t .

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.

Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $\quad v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.

Résoudre l'équation différentielle (F).

2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

a. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

b. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$.

3. Calculer $V = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90% de sa valeur limite V ?

4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

<u>Exercice 3</u> (5 *points*)

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : Question de cours

On suppose connus les résultats suivants :
(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;
(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbf{N}$, on a $u_n \leq v_n$;
(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbf{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbf{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

<u>Exercice 4</u> (3,5 *points*)

Une suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{10u_n}$ pour tout entier n.

1°) Pour tout entier n, on pose : $v_n = \ln u_n - \ln 10$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

2°) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n, et étudier la convergence de (u_n).