Mercredi 11 janvier 2012 T°S_{1-4}

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (9 *points*)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{u},\vec{v}$) d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+i\sqrt{3}$, $z_B = 2i$.

1. a. Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle.
b. Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
c. Déterminer la nature du triangle OAB.

2. On note r la rotation de centre O qui transforme A en B. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe du point M'.

a. Calculer un argument du quotient $\frac{z_B}{z_A}$. Interpréter géométriquement ce résultat.
b. En déduire l'écriture complexe de la rotation r.

3. Soient Γ le cercle de centre A passant par O et Γ' le cercle de centre B passant par O.
Soit C le deuxième point d'intersection de Γ et Γ' (autre que O). On note z_C son affixe.
a. Justifier que le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r.
b. Calculer l'affixe z_I du milieu I de [AB].
c. Déterminer la nature du quadrilatère OACB.
d. En déduire que I est le milieu de [OC] puis montrer que l'affixe de C est :
$z_C = 1 + (2 + \sqrt{3})i$.

4. Soit D le point d'affixe $z_D = 2i\sqrt{3}$.
a. Justifier que le point D appartient au cercle Γ. Placer D sur la figure.
b. Placer D' image de D par la rotation r définie à la question **2.**
On note $z_{D'}$ l'affixe de D'.
Montrer que $z_{D'} = -\sqrt{3} + 3i$.

5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 (*11 points*)

Partie A. Etude d'une fonction auxiliaire *g*.

La fonction g est définie sur **R** par : $g(x) = (2 - x)\, e^x + 1$.

1) Calculer la limite de g en +∞.

2) Déterminer le sens de variation de g sur **R**.

3) Démontrer que $g(x) > 0$ sur]-∞ ; 2[et que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur [2 ; +∞ [et vérifier que $2{,}12 < \alpha < 2{,}13$.
En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.

4) Montrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 2}$.

Partie B. Restitution organisée des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Rappeler la limite $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$ et la démontrer.

Partie C. Etude d'une fonction *f*.

La fonction f est définie sur **R** par $f(x) = \frac{x-1}{e^x+1}$. On note C la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (unités : 2 cm en abscisses et 8 cm en ordonnées).

1) Calculer les limite de f en –∞ et en +∞.

2=En déduire que la courbe C admet une asymptote horizontale et démontrer qu'elle admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$.

3) Montrer que f est dérivable sur **R** et montrer que f' est du signe de g sur **R**.

4) En déduire le sens de variation de f sur **R**.

5) Montrer que $f(\alpha) = \alpha - 2$ où α est le réel trouvé dans la **partie A** puis en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.

6) Tracer C et placer le point A(α, $f(\alpha)$).