Mathématiques
Bac Blanc

Calculatrice autorisée

4h

Exercice 1 *(5 points)*

Pour chaque question, indiquer uniquement le numéro correspondant à la bonne réponse, aucune justification n'est demandée.

(Réponse correcte : + 0,5 pt … Absence de réponse : 0 pt … Mauvaise réponse : – 0,25 pt)
(Si la note finale de l'exercice est négative elle est ramenée à 0)

1. L'unique solution de l'équation $\frac{2z-1}{z+2i}=1-i$ est :

a) $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$ **b)** $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$ **c)** $-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$ **d)** $-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$

2. Soit z un nombre complexe non nul ayant pour argument θ, alors un argument du nombre complexe $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a) $-\frac{\pi}{3}+\theta$ **b)** $-\frac{\pi}{3}-\theta$ **c)** $\frac{2\pi}{3}+\theta$ **d)** $\frac{2\pi}{3}-\theta$

3. Soit $n\in\mathbf{N}$, le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

a) $n = 6k$, $k\in\mathbf{Z}$. **b)** $n = 6k + 1$, $k\in\mathbf{Z}$. **c)** $n = 6k + 2$, $k\in\mathbf{Z}$. **d)** $n = 6k + 3$, $k\in\mathbf{Z}$.

4. Pour tout nombre complexe z, $|z + i|$ est égal à :

a) $|z - i|$ **b)** $|z| + 1$ **c)** $|z - 1|$ **d)** $|i\bar{z} + 1|$

5. Soit M un point du plan complexe d'affixe z, et (C) le cercle de centre O et de rayon 1.
On peut dire que $M\in(C)$ si et seulement si :

a) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$. **b)** $\bar{z} = z$. **c)** $z^2 + 1 = 0$. **d)** $z\bar{z} - 1 = 0$.

6. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixes respectives z et z', on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le produit scalaire de ces deux vecteurs, alors :

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathrm{Re}(zz')$. **b)** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathrm{Im}(zz')$. **c)** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathrm{Re}(z\overline{z'})$. **d)** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathrm{Im}(z\overline{z'})$.

7. Soit a, b et c trois réels (avec $a \neq 0$) et (E) l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue complexe z.
On peut dire que z est solution de (E) si et seulement si :

a) $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ sont solutions de (E).
b) $\bar{z}$ est solution de (E).
c) $-z$ est solution de (E).
d) $\frac{1}{z}$ est solution de (E).

8. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1| = |z + i|$ est la droite d'équation :

a) $y = x - 1$. **b)** $y = -x$. **c)** $y = -x + 1$. **d)** $y = x$.

9. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ est :

a) un cercle privé de deux points.
b) un demi-cercle privé de deux points.
c) une droite privée de deux points.
d) une demi-droite privée de deux points.

10. Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B et z_C non nulles.

a) A, B et C sont alignés si et seulement si : $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\ [2\pi]$.

b) A, B et C sont alignés si et seulement si : $\dfrac{z_C}{z_A} = \dfrac{z_B}{z_A}$.

c) Si $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ alors les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

d) Si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires alors $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

__Exercice 2__ *(5 points)* ***Pour les élèves suivant la Spécialité Mathématique…***

Des nombres étranges !

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens.
Cet exercice propose d'en découvrir quelques unes.
Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1.
Ainsi $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, …

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition en produit de facteurs premiers d'un rep-unit.
Justifier brièvement la réponse.

2. Donner la décomposition en facteurs premiers de N_3, N_4 et N_5.

3. Soit n un entier strictement supérieur à 1. On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1.
a) Montrer que, dans son écriture décimale, n se termine lui-même par 1 ou par 9.
b) Montrer qu'il existe un entier m tel que n s'écrive sous la forme $10m + 1$ ou $10m - 1$.
c) En déduire que $n^2 \equiv 1\ (20)$.

4. a) Soit $k \geq 2$. Quel est le reste de la division de N_k par 20 ?
b) En déduire qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré.

Exercice 2 *(5 points)* ***Pour les élèves ne suivant pas la Spécialité Mathématique…***

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$u_0 = 5$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)u_{n-1}+\dfrac{6}{n}$.

1. a. Calculer u_1.

b. Les valeurs de u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11} sont respectivement égales à :
45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à : $4n^2 + 12n$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4. Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.

Exercice 3 *(4 points)*

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue.
On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et **justifier votre réponse**.
Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

P : Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbf{R}$ par : $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = n\,u^{n-1}$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1\,;\,1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\,;\,1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.
On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\,;\,0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.

a. Démontrer que pour tout x de $]-\pi\,;\,0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.

b. Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

<u>Exercice 4</u> *(6 points)*

Soit f la fonction définie sur $D_f = \left]-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ par :

$f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$.

1. Etudier la parité de f et en déduire qu'il suffit d'étudier f sur $D_e = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$.

2. Démontrer que $f'(x)$ est du signe de $g(x) = 2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1$ sur D_e.

3. a) Déterminer une factorisation du polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.
b) En déduire que, pour $x \neq 0$, $f'(x)$ est du signe de $(\cos x + ½)$ sur D_e.

4. a) Etudier les variations de f sur D_e.
b) Dresser le tableau de variations complet de f sur D_e.
(Le tracé de la courbe représentative de f n'est pas demandé)

5. Démontrer que, pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $x \leq \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x$.
Cette inégalité est due au mathématicien néerlandais Christian Huygens qui la démontra géométriquement au 17ème siècle.

6. Résoudre l'équation $f(x) = -3x$ sur D_e.