NOM & Prénom : ………………………………………………

Mardi 8 novembre 2011 T°S_4

DEVOIR de Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(8 points)*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$a = \frac{1}{2} i$, $b = -2$ et $c = i$.

À tout point M, distinct de B, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \varphi(z)$, où :

$$\varphi(z) = \frac{2z - i}{z + 2}$$

1°) Déterminer l'image de C.

2°) Déterminer l'antécédent de C.

3°) On recherche les points invariants, c'est-à-dire les points M d'affixe z telle que $\varphi(z) = z$.

a) Démontrer que $\varphi(z) = z$ si et seulement si $z^2 = -i$.
b) En déduire $|z|$ et $\arg(z)$.
c) Déterminer les points invariants par φ.

4°) Interpréter géométriquement $|\varphi(z)|$ en fonction de A, B et M.
En déduire l'ensemble (D) des points M d'affixe z telle que $|\varphi(z)| = 2$.

5°) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\varphi(z)$ est un réel et (F) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\varphi(z)$ est un imaginaire pur.
On souhaite ici déterminer les ensembles (E) et (F) par deux méthodes différentes.

a) **Première Méthode**.
On note $z = x + iy$, où $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$ et $\varphi(z) = x' + iy'$, où $x' \in \mathbf{R}$ et $y' \in \mathbf{R}$.
Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
En déduire des équations des ensembles (E) et (F) et leur nature.

b) **Deuxième Méthode**.
Interpréter géométriquement $\arg(\varphi(z))$ en fonction A, B et M.
En déduire la nature et les éléments caractéristiques des ensembles (E) et (F).

6°) Tracer les ensembles et les points obtenus dans les questions précédentes. (unité graphique : 5 cm)

Exercice 2 *(7 points)*

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

1°) Etudier les variations de g.
2°) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.
3°) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbf{R}$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty ; -1[\cup[1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 - 1}}{x + 1}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal

1°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
En déduire l'existence d'une droite asymptote à la courbe C_f.
2°) Etudier la dérivabilité de f sur D_f.
Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

3°) Démontrer que, pour tout $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)\sqrt{x^4 - 1}}$.

4°) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations complet.

5°) Démontrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

6°) Tracer la courbe C_f. (unité graphique : 2 cm)

Exercice 3 *(5 points)*

Soit f la fonction définie sur **R**\{-4} par : $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$

et C_f sa courbe représentative représentée dans le repère ci-contre

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = -{}^{3}/_{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$

1°) Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2.

2°) Dans le repère ci-contre tracer la droite (Δ) d'équation $y = x$.
Utiliser C_f et (Δ) pour construire sur l'axe des abscisses, les points A_0, A_1, A_2 d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 ainsi que les points B_0, B_1, B_2 d'abscisses respectives v_0, v_1, v_2.

3°) On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$w_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison ${}^{2}/_{5}$ dont on précisera le premier terme.
b) En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. Préciser sa limite.

4°) En reprenant la même méthode pour la suite (v_n), écrire **sans les justifier** une expression de v_n en fonction de n et la limite de la suite (v_n).