Jeudi 6 octobre 2011 Term S_4

DEVOIR de MATHEMATIQUES (2h)

(Calculatrice autorisée)

I/ Nombres complexes. *(5 points)*

1°) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$a = (2 + 3i)^2$

$b = \dfrac{1}{2-i} + 2 - i$

$c = |6+8i| - \overline{6+8i}$

2°) Résoudre dans **C** les équations suivantes :

a) $iz + 1 = 2z + 8i$.

b) $\bar{z} - i = 3\bar{z} + 3$

II/ Trigonométrie. *(3 points)*

Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation suivante : $2 + \cos 2x = 3 \cos x$.

III/ Continuité et dérivabilité. *(5 points)*

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie sur **R** par :

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x^2 - x}, & \text{si } x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\\ f(x) = x^3 - x^2, & \text{si } x \in]0;1[\\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

IV/ Etude de fonctions. *(7 points)*

Partie A

Soit la fonction g définie sur **R** par : $g(x) = x^4 + 16x^3 + 3$.

1°) Étudier le sens de variation de g sur **R**.

2°) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β dans **R** dont on donnera, des valeurs approchées à 10^{-2} près.

3°) En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit la fonction f définie sur **R**\{-4} par : $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{(x+4)^3}$

1°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Montrer que, sur **R**\{-4}, $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$.

3°) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation complet.

4°) Proposer une fenêtre ($x_{\min}$, $x_{\max}$, $y_{\min}$, $y_{\max}$) à paramétrer sur une calculatrice graphique pour visualiser correctement la courbe représentative de f. (le tracé n'est pas demandé)

- Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction de la copie -