

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice non autorisée)

I/ Etude d'une fonction rationnelle. (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = -2x + 1 + \frac{1}{(x-1)^2}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal. (unité graphique : 1 cm)

- 1°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - 2°) Déterminer les équations des deux asymptotes à la courbe C_f et la position de C_f par rapport à son asymptote oblique.
 - 3°) Déterminer une expression de la fonction dérivée f' de f .
 - 4°) Déterminer le signe de $x^2 - 3x + 3$ sur \mathbf{R} .
- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet.
- 5°) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 2.
 - 6°) Tracer la courbe C_f .

II/ Valeurs remarquables. (4 points)

Soit $x \in [0 ; \pi[$ tel que : $\tan x = \sqrt{3} - 2$

- 1°) Calculer $\tan^2 x$ puis en déduire la valeur de $\cos x$.
- 2°) Calculer $\tan(2x)$.
- 3°) En déduire la valeur de x .

III/ Equations. (5 points)

Résoudre dans \mathbf{R} puis dans $]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

- 1°) $\cos 3x = \frac{1}{2}$
- 2°) $\tan x = 2 \sin^2 x$.

IV/ Etude d'une fonction trigonométrique. (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[-\pi ; \pi]$ par : $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x + \frac{3}{2}$.

- 1°) Etudier la parité de f et justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à $[0 ; \pi]$.
 - 2°) Démontrer que pour tout x de $[0 ; \pi]$, on a : $f'(x) = \sin x (2 \cos x - 1)$.
 - 3°) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; \pi]$.
- En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations complet sur $[-\pi ; \pi]$.
(le tracé de la courbe n'est pas demandé)
- 4°) Exprimer $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$ et résoudre, sur $[-\pi ; \pi]$, l'équation $f(x) = 2$.