Jeudi 5 mai 2011 T°S

Bac Blanc de Mathématiques (4 h)

Calculatrice autorisée

Exercice 1 *(5 points)*

Question de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I.

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\,;\,b]$ de I.

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On note f' la fonction dérivée de f.

On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Utiliser la question de cours pour montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On désigne par ln la fonction logarithme nepérien.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;\,2[$ on a $f'(x) = \dfrac{4}{4-x^2}$.

b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$.

Partie C

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée sur la feuille annexe.

Hachurer sur cette feuille la partie $\mathscr{P}$ du plan constituée des points $M(x\,;\,y)$ tels que

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant \ln 3.$$

En utilisant la partie A, calculer en cm^2 l'aire de $\mathscr{P}$.

Exercice 2 *(5 points)*

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

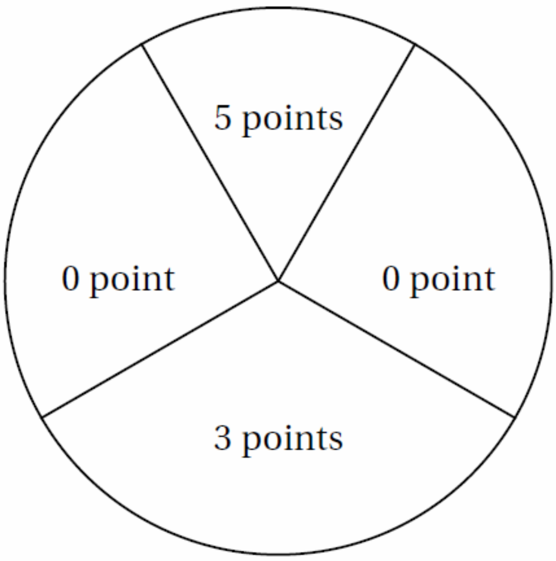
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   En déduire que si $x \in [0\ ;\ 1]$ alors $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

Partie B

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 3 *(5 points)*

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.
   On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
   On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
   On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
   On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.
2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
   On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
   On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
   On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».
   On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.
   a. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p\left(G_2\right) = \frac{5}{36}$.
   On admettra dans la suite que $p\left(G_3\right) = \frac{7}{36}$
   b. En déduire $p(P)$.
3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
   Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?
4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.
   Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.
   On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

<u>Exercice 4</u> *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique : 8 centimètres.
On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+\mathrm{i})z.$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.
2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.
   a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$
   b. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative meme non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soient n et p deux entiers naturels. À quelle condition sur n et p les points M_n et M_p sont-ils alignés avec l'origine O du repère ?

<u>Exercice 4</u> *(5 points)*

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique : 4 centimètres.
On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})z.$$

1. Montrer que la transformation f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.
   a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$.
   b. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
   c. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Prouver que les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire. Préciser la valeur exacte de cette aire.

Annexe à rendre avec la copie

Nom et Classe ………..………..………..………..………..………..………..………..