Vendredi 23 mai 2008 Term S_1

DEVOIR de Mathématiques (2h)

(Calculatrice non autorisée)

Exercice 1 *(3 points)*

Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de :

$$I = \int_0^1 (3x^2 + x)\ln(2x+1)dx$$

Exercice 2 *(9 points)*

Partie A - Question de cours :

Rappeler et démontrer la formule permettant de calculer la distance d'un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ à un plan (P) d'équation : $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormal.

Partie B

Résoudre le système : $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y - 5z = 4 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$

Partie C

L'espace est rapporté à un repère orthonormal de centre O. Soient les points A(1 ; 2 ; 3), B(0 ; 2 ; -1), C(-2 ; 0 ; 1), D(3 ; -2 ; 4) et E(3 ; 0 ; -6)

1°) Déterminer une équation cartésienne des plans suivants :

a) (P_1) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ (1 ; 2 ; -1)

b) (P_2) = (OBC).

c) (P_3) plan médiateur du segment [DE].

d) Déterminer l'intersection de ces trois plans.

2°) Calculer la distance du point B(0 ; 2 ; -1) au plan (P) d'équation : $x + 2y - z = 2$.

3°) Déterminer un système d'équations paramétriques des droites

a) (D_1) passant par B et de vecteur directeur $\vec{n}$ (1 ; 2 ; -1)

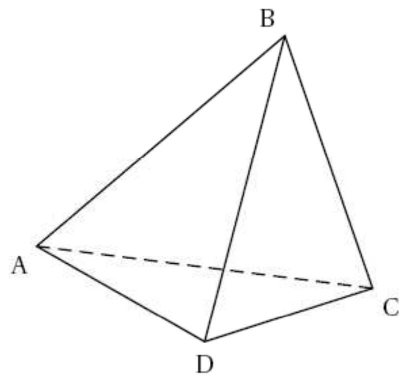
b) (D_2) = (CE).

c) Ces deux droites sont-elles sécantes ?
Dans l'affirmative, déterminer leur intersection.

d) Déterminer l'intersection de la droite (D_1) et du plan (P) d'équation : $x + 2y - z = 2$.

Exercice 3 *(8 points)*

On considère un tétraèdre $ABCD$.
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.
On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.



1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.
(On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. **a.** Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?