Vendredi 28 mars 2008 T°S

Devoir de Mathématiques (2 h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (8 points)

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.
On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1°) Sachant que $p_4 = 0{,}4$ démontrer que $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$ et $p_3 = 0{,}3$.
2°) On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

3°) On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

a) Pour $1 \le i \le 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'événement $(X = i)$.
b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
c) Calculer la probabilité de l'événement $(X \ge 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.

4°) Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.
On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
b) Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).
c) Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 0{,}999$.

Exercice 2 (12 points)

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ et (C) sa représentation graphique dans un repère du plan.

1°) Déterminer la limite de f en $+\infty$, et sa limite en $-\infty$.

2°) Calculer, pour tout réel x, $f(x) + f(-x)$.
Que peut-on en déduire pour le point $A(0 ; 1 + \ln 4)$?

3°) Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations.

4°) a) Justifier que, pour tout réel m, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans **R**.
b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la solution a de l'équation $f(x) = 3$. Justifier la réponse.
c) Pour quelle valeur de m le nombre $-a$ est-il la solution de l'équation $f(x) = m$?

5°) a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$.
b) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x + \ln 4$ et la droite (Δ') d'équation $y = x + 2 + \ln 4$ sont des asymptotes à la courbe (C).
Etudier la position de la courbe (C) par rapport à son asymptote (Δ).

6°) a) On considère un réel positif α.
Que représente l'intégrale : $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} [f(x) - x - \ln 4]dx$?
b) Montrer que $I(\alpha) = 2\ln\left(\dfrac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha} + 1}\right)$ (on pourra utiliser le résultat de la question 5.a).
c) Calculer α pour que $I(\alpha) = 1$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.