Mardi 5 février 2008 $T°S_{1\text{-}3}$

DEVOIR de Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(6,5 points)*

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaîne de production. Il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut. En effet, des études statistiques ont montré que, sur une journée :

- la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur, c'est à dire sans qu'il y ait eu incident, est égale à $\frac{1}{50}$;
- la probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est égale à $\frac{1}{500}$;
- la probabilité qu'un incident se produise est égale à $\frac{1}{100}$

On pourra noter :

A l'événement « l'alarme se déclenche » ;
I l'événement « un incident se produit » ;
$\overline{A}$ et $\overline{I}$ leurs événements contraires respectifs.

Ainsi, par exemple, $A \cap \overline{I}$ représente l'événement « l'alarme se déclenche sans qu'il y ait incident ».

Partie A

1°) Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche. En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.
2°) Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut ?
3°) L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?

Partie B

Les assureurs estiment qu'en moyenne, pour l'entreprise, le coût des anomalies est le suivant :

- 1 000 € pour un incident lorsque l'alarme fonctionne ;
- 3 000 € pour un incident lorsque l'alarme ne se déclenche pas ;
- 200 € lorsque l'alarme se déclenche par erreur.

On considère qu'il se produit au plus une anomalie par jour.
Soit X la variable aléatoire représentant le coût journalier des anomalies pour l'entreprise.

1°) Donner la loi de probabilité de X.
2°) Quel est le coût journalier moyen des anomalies ?

Exercice 2 *(7,5 points)*

Dans tout le texte, e désigne le nombre réel qui vérifie $\ln e = 1$.

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x + xe}{x^2}$,

On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A

- *Etude d'une fonction auxiliaire*

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = -2 \ln x - xe + 1$.
1°) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2°) Etudier le sens de variation de g.
3°) Montrer que dans $[0,5 ; 1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α.
Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.
4°) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

➢ *Etude de la fonction f*

1°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Soit f' la fonction dérivée de f.

Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

3°) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$.

4°) Donner le tableau de variation de f.

5°) Construire (Γ).

<u>Exercice 3</u> *(6 points)*

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E) : \; y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y).$$

1°) Démontrer l'équivalence suivante :

Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0 ; +\infty[$,

$f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0 ; +\infty[$,

$g'(t) = \dfrac{1}{20}g(t) - \dfrac{3}{20}$.

2°) Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$(H) : \; z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

3°) En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0 ; +\infty[$:

$$f(t) = \exp\left(3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto e^x$).

4°) La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t) = \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

c) Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.
Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?