NOM : ....……..…................……….. ** Term **S
Prénom : ……..……......…… Vendredi 30 novembre 2007

DEVOIR de Mathématiques (3 h.)

(Calculatrice autorisée)

I/ **Complexes.** *(5,5 points)*

Soit les points A, B et E d'affixes respectives :
$z_A = -2 + 2i$, $z_B = -6 - i$, $z_E = 1 - 2i$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1°) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure des résultats obtenus. (unité graphique :1 cm)

2°) a) Résoudre dans **C** l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$.
Écrire les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique (forme cartésienne) et sous forme d'Euler (forme exponentielle).
b) Justifier que le point d'affixe z_1 est l'image du point d'affixe z_2 par une réflexion dont on précisera l'axe.

3°) Déterminer l'affixe z_D du point D, image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

4°) Soit r la rotation de centre A qui transforme B en E.
a) Déterminer l'angle de la rotation r.
b) Donner l'écriture complexe de r.

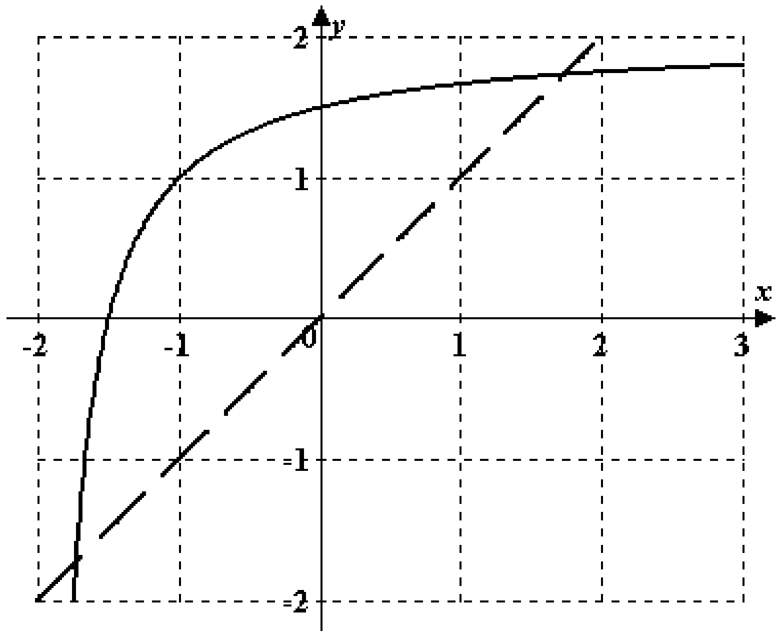
5°) Soit f la transformation qui à tout point M du plan complexe d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = 2z + 6 + i$.
a) Démontrer que f admet un unique point invariant dont on donnera l'affixe b.
b) Démontrer que, pour tout complexe z, on a : $z' - b = 2(z - b)$.
c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.
d) Déterminer l'affixe z_I du point I image de A par f.
e) Vérifier que $I = r(E)$

6°) Déterminer la nature du quadrilatère AIDE.

II/ **Suites.** *(6 points)*

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{2+u_n}$.

1°) Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes des fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{3+2x}{2+x}$ et $g(x) = x$.



Utiliser ce graphique pour représenter, en expliquant, les trois premiers termes de la suite (u_n).

2°) Démontrer par récurrence que u_n est positif pour tout entier naturel n non nul; en déduire que u_n est défini quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

3°) a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$u_{n+1} = a + \frac{b}{2+u_n}$$
b) En déduire, par récurrence, que la suite (u_n) est majorée par $\sqrt{3}$.

4°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5°) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
b) Déterminer la limite de la suite (v_n).
c) Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire la limite de la suite (u_n).

III/ <u>Étude de fonction.</u> *(6,5 points)*

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} - x$
et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1°) Justifier que l'on peut définir f sur $\mathbf{R}$.

2°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à (C_f) dont on donnera une équation..

3°) Démontrer que la droite $\Delta : y = -2x + 1$ est asymptote oblique à (C_f).

4°) Justifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et déterminer une expression de $f'(x)$ sous forme d'un quotient.

5°) Déterminer le signe de $g(x) = (x-1) - \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ sur chacun des intervalles : $]-\infty\,;1[$ et $[1;+\infty[$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbf{R}$.
Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation complet

6°) Déterminer une équation de la tangente à (C_f) en K(1; 0).

7°) Tracer la courbe (C_f) (unité graphique : 2 cm)

IV/ <u>Extrait du concours d'entrée à l'ESIEE</u> *(2 points)*

L'exercice comporte deux séries de 5 affirmations ; vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F). ***Répondre sur le sujet.***
Toute réponse exacte rapporte 0,2 point, une réponse inexacte entraîne le retrait de 0,1 point et l'absence de réponse ne rapporte ni ne retire aucun point.

- **<u>1ère série</u>**

Soit f une fonction définie sur [0; 2], on considère les énoncés suivants :
P : « Pour tout $x \in [0; 2]$, $f(x) \neq 0$ »
Q : « f n'est pas positive sur [0; 2] »
Alors :

(a)		P signifie : « f est strictement positive sur [0; 2] ou f est strictement négative sur [0; 2] ».
(b)		P signifie : « Pour tout $x \in [0; 2]$, $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ »
(c)		Q signifie : « f est négative sur [0; 2] »
(d)		La négation de P est : « f est la fonction nulle sur [0; 2] »
(e)		La négation de Q est : « f n'est pas négative sur [0; 2] »

- **<u>2ème série</u>**

On considère un ensemble de 100 dalles qui sont carrées, hexagonales ou octogonales et qui sont d'une seule couleur bleue, verte ou blanche.
Sachant que toutes les dalles blanches sont carrées
on peut en déduire :

(a)		Aucune dalle hexagonale n'est blanche
(b)		Aucune dalle blanche n'est hexagonale
(c)		Si une dalle est carrée alors elle est blanche
(d)		Si une dalle est blanche alors elle est carrée
(e)		Pour qu'une dalle soit blanche, il suffit qu'elle soit carrée

Ne pas oublier d'inscrire NOM, Prénom et Classe sur le sujet et de le rendre avec la copie !