Vendredi 19 octobre 2007 **Term S**

DEVOIR de Mathématiques (4 h.)

(Calculatrice autorisée)

IV/ Extraits du concours d'entrée à l'ESIEE *(5 points)*

L'exercice comporte 5 parties indépendantes, chaque partie comportant 5 affirmations. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).
Toute réponse exacte rapporte 2 dixièmes de point, une réponse inexacte entraîne le retrait d'un dixième de point et l'absence de réponse ne rapporte ni ne retire aucun point.

Partie 1

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \sin^2 x \ \cos 2x$.

a) Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, $f(x) \geq 0$.

b) Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, $f'(x) = \sin 2x \ (1 - 4\sin^2 x)$.

c) f est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$.

d) f est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{6}\right]$.

e) Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, $f(x) \leq \frac{1}{8}$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = x^6 - 2x^3 + 1$.

a) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans **R**..

b) L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions distinctes dans $[-1 ; +\infty[$..

c) Si $x \in [-1 ; 1]$ alors $f(x) \leq 4$.

d) Pour tout $x \in$ **R**, si $f(x) \leq 4$ alors $x \in [-1 ; 1]$.

e) Pour tout $x \in$ **R**, $f(x) \leq 4$ équivaut à $x \in [-1 ; 1]$.

Partie 3

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur **R**\{1} dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

(les flèches obliques traduisent une monotonie stricte)

a) f peut être une fonction paire.

b) Nécessairement $f'(0) \leq 0$.

c) L'équation $f(x) = 2$ admet au plus deux solutions distinctes positives.

d) L'équation $f(x) = 2$ admet exactement quatre solutions distinctes.

e) L'équation $f(x) = x$ admet au moins deux solutions distinctes.

Partie 4

Soit f la fonction définie sur [-4 ; 4] par :

$$\begin{cases} f(x) = -2x-4 & \text{si } x \in [-4\,;-2] \\ f(x) = 2-x-x^2 & \text{si } x \in]-2\,;4]. \end{cases}$$

On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormal.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$.

b) f est dérivable en $x = -2$.

c) (C) admet deux tangentes horizontales.

d) La tangente à (C) au point d'abscisse $x = -1$ a un unique point d'intersection avec (C).

e) La tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$ a un unique point d'intersection avec (C).

Partie 5

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur **R**. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. a, b, c et d sont des réels non nuls.

(T_1) la droite d'équation $y = ax + b$ est tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$.

(T_2) la droite d'équation $y = cx + d$ est tangente à (C) au point d'abscisse $x = -1$.

a) Si f est paire alors $a = -c$.

b) Si $a = c$ alors f est impaire.

c) Si f est paire alors $b = d$.

d) Si $b = d$ alors $f(1) = f(-1)$.

e) Si $ac < 0$ alors il existe $x \in [-1\,;1]$ tel que $f'(x) = 0$.