

NOM :

Prénom :

Term S

Vendredi 19 octobre 2007

DEVOIR de Mathématiques (4 h.)*(Calculatrice autorisée)***I/ Arithmétique. (5 points) (Pour les élèves ayant choisi la spécialité Mathématiques)****--- A rédiger sur une feuille séparée ---****Partie A**Soit N un entier naturel, impair non premier.On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.1°) Montrer que a et b n'ont pas la même parité.2°) Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q .3°) Quelle est la parité de p et de q ?**Partie B**

On admet que 250 507 n'est pas premier.

On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a; b)$ vérifiant la relation :

$$(E) : a^2 - 250\,507 = b^2.$$

1°) Soit X un entier naturel.a) Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.b) Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2 .c) Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.2°) Justifier que si le couple $(a; b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$.Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501; b)$.3°) On suppose que le couple $(a; b)$ vérifie la relation (E).a) Démontrer que a est congru à 503 ou 505 modulo 9.b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k; b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.**Partie C**

1°) Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit de deux facteurs.

2°) Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?

3°) Cette écriture est-elle unique ?

I/ Complexes. (5 points) (Pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité Mathématiques)

Soit $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

1°) Calculer $P(1 + i)$.2°) Démontrer que $P(z)$ admet une unique racine imaginaire pure que l'on déterminera.3°) Déterminer les réels a , b et c tels que : $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$ pour tout complexe z .4°) Résoudre dans \mathbf{C} l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans \mathbf{C} .5°) Soient A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} - i$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = 2i$.

a) Faire une figure. Démontrer que A, B et C sont sur un même cercle de centre O.

b) Calculer $z_B - z_A$ et $z_B - z_C$, en déduire que le quadrilatère OABC est un losange.

II/ Complexes. (5 points)

A tout complexe $z \neq -i$ on associe le complexe z' tel que : $z' = \frac{iz-2}{z+i}$.

1°) Calculer z' pour $z = i$.

2°) Déterminer z tel que $z' = 2$.

3°) Soit $z = x + iy$, $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$ et $z' = x' + iy'$, $x' \in \mathbf{R}$ et $y' \in \mathbf{R}$.

Démontrer que : $x' = \frac{-x}{x^2 + (y+1)^2}$ et $y' = \frac{x^2 + y^2 + 3y + 2}{x^2 + (y+1)^2}$

4°) Déterminer l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

5°) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

6°) Soit A d'affixe $a = -2i$ et B d'affixe $b = -i$.

a) Interpréter géométriquement $|z'|$

b) En déduire l'ensemble (E_3) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

III/ Étude de fonctions. (5 points)**Partie A.**

Soit g la fonction définie sur \mathbf{R} par : $g(x) = 14x^3 + 3x^2 - 2$.

1°) Étudier les limites et les variations de g sur \mathbf{R} . (On ne demande pas le tracé de la courbe)

2°) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet, sur \mathbf{R} , une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3°) En déduire le signe de g sur \mathbf{R} .

Partie B.

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$ par : $f(x) = (x^3 - 1)\sqrt{4x+1}$.

1°) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2°) Étudier la dérivabilité de f .

3°) Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations complet.

4°) Tracer la courbe C_f représentative de f dans un repère orthonormal.

IV/ Extraits du concours d'entrée à l'ESIEE (5 points) (Voir feuille jointe)

Partie 1	a	<input type="text"/>	b	<input type="text"/>	c	<input type="text"/>	d	<input type="text"/>	e	<input type="text"/>
Partie 2	a	<input type="text"/>	b	<input type="text"/>	c	<input type="text"/>	d	<input type="text"/>	e	<input type="text"/>
Partie 3	a	<input type="text"/>	b	<input type="text"/>	c	<input type="text"/>	d	<input type="text"/>	e	<input type="text"/>
Partie 4	a	<input type="text"/>	b	<input type="text"/>	c	<input type="text"/>	d	<input type="text"/>	e	<input type="text"/>
Partie 5	a	<input type="text"/>	b	<input type="text"/>	c	<input type="text"/>	d	<input type="text"/>	e	<input type="text"/>

Ne pas oublier d'inscrire NOM, Prénom et Classe sur le sujet et de le rendre avec la copie !