Avril 2008 T°S

<u>*Bac Blanc – Mathématiques*</u> (4 h)

(Calculatrice autorisée)

<u>Exercice 1</u> *(5 points)*

Cet exercice comporte ***deux parties indépendantes.***
La partie **A** *est la démonstration d'un résultat de cours. La partie* **B** *est un Q.C.M.*

Partie A

Question de cours
Soient A et B deux événements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie B

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse enlève ½ point. L'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie B est ramenée à zéro.

1°) Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher.
On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge ?
a) $\frac{75}{512}$ b) $\frac{13}{56}$ c) $\frac{15}{64}$ d) $\frac{15}{28}$

2°) Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population.
Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25.
Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe ?
a) $\frac{1}{120}$ b) $\frac{3}{40}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{4}{30}$

3°) Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.
Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
Quelle est la variance de X ?
a) 2 b) 13 c) 16 d) 17

4°) La durée d'attente T, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{6}$.

On a donc pour tout réel $t > 0$: $P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ (avec $\lambda = \frac{1}{6}$)

où t désigne le temps exprimé en minutes.
Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total soit inférieur à 5 minutes ?
a) 0,2819 b) 0,3935 c) 0,5654 d) 0,6065

Spécialité Mathématique uniquement

Exercice 2 *(5 points)*

le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$a = i$,
$b = 1 + 2i$,
$c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$,
$d = 3 + 2i$.

On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1°) Exprimer z' en fonction de z.
Déterminer les éléments caractéristiques de s.
Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2°) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

3°) Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes de la suite (u_n).

4°) Montrer que, pour tout entier naturel n,
$u_n = 2^n - 1$.

5°) Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geq p$,
$u_n = u_p\,(u_{n-p} + 1) + u_{n-p}$.
La notation PGCD(a ; b) est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b.
Montrer pour $n \geq p$ l'égalité :
$\text{PGCD}(u_n\,;\,u_p) = \text{PGCD}(u_p\,;\,u_{n-p})$.

6°) Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :
$\text{PGCD}(u_n\,;\,u_p) = u_{\text{PGCD}(n\,;\,p)}$.
Déterminer le nombre :
$\text{PGCD}(u_{2005}\,;\,u_{15})$.

Spécialité Sciences Physiques ou Sciences de la Vie et de la Terre.

Exercice 2 *(5 points)*

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.
Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre [OP].
On désigne par Ω le centre de Γ.
Soit A, B, C les points d'affixes respectives a, b, c où :
$a = 5 + 5i$, $b = 1 + 3i$ et $c = 8 - 4i$.

1°) Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ.

2°) Soit D le point d'affixe $2 + 2i$.
Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

Partie B

A tout point M du plan différent de O, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{20}{\bar{z}}$$

où $\bar{z}$ désigne le nombre conjugué de z.

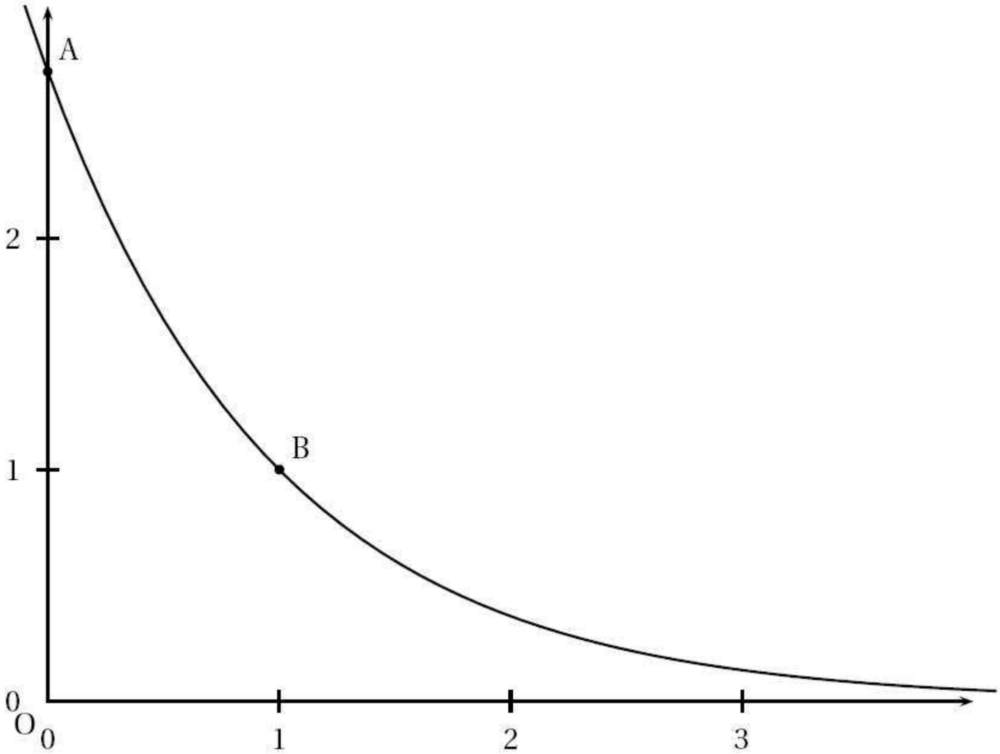
1°) Montrer que les points O, M et M' sont alignés.

2°) Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z. On se propose de déterminer géométriquement le point M' associé au point M.

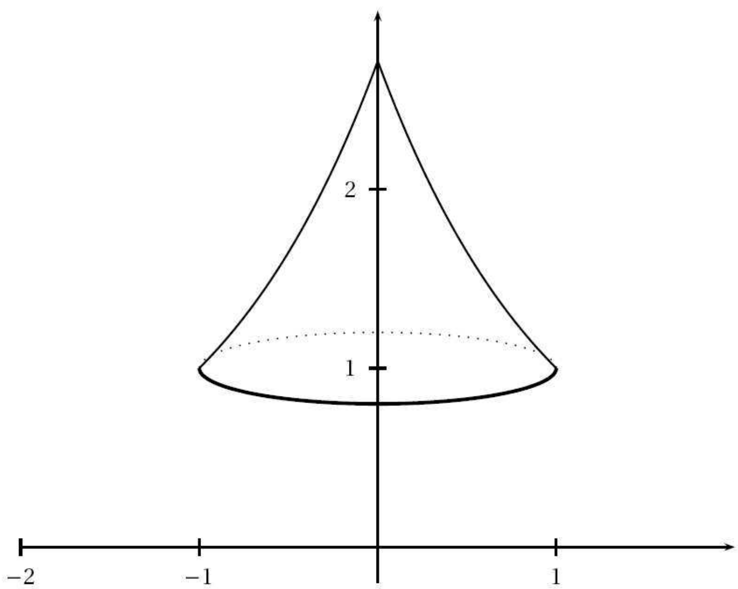
a) Vérifier que $z + \bar{z} = 4$.
b) Exprimer $z' + \overline{z'}$ en fonction de z et $\bar{z}$ et en déduire que : $5(z' + \overline{z'}) = z'\overline{z'}$.
c) En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ.
Placer M' sur la figure.

Exercice 3 *(3 points)*

On a représenté en ci-dessous, dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f dérivable sur **R**, solution de l'équation différentielle
(E) : $y' + y = 0$ et telle que $f(0) = e$.



1°) Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.
2°) Soit t un réel donné de l'intervalle [1 ; e].
Résoudre dans **R** l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x.



3°) Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.
On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe AB comme représenté ci-contre.
On note V son volume.
On admet que $V = \pi\int_1^e (1-\ln t)^2\,dt$.

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.

<u>Exercice 4</u> *(7 points)*

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur **R** par

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

On note respectivement C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O\,;\ \vec{i}, \vec{j}\,)$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

1°) Identifier C_f et C_g sur la figure fournie. (Justifier la réponse apportée).

2°) Étudier la parité des fonctions f et g.

3°) Étudier le sens de variation de f et de g . Étudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.

4°) Étudier la position relative de C_f et C_g.

Partie B

On considère la fonction G définie sur **R** par

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt\,.$$

1°) Que représente G pour la fonction g ?

2°) Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.

3°) Étudier le sens de variations de G sur **R**.

On définit la fonction F sur **R** par : pour tout réel I, $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

4°) Démontrer, que, pour tout réel x, $G(x) = \frac{1}{2}\left(F(x) - xe^{-x^2}\right)$.(on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de G et de $x \mapsto \frac{1}{2}\left(F(x) - xe^{-x^2}\right)$).

On admet que la fonction F admet une limite finie l en $+\infty$, et que cette limite l est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine A limité par la courbe C_f et les demi-droites $[O\,;\ \vec{i}\,)$ et $[O\,;\ \vec{j}\,)$.

5°) a) Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

b) Interpréter en termes d'aires le réel N = $\int_0^1 (1-t^2)e^{-t^2}\,dt$.

c) En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire P en unités d'aire du domaine D limité par la demi-droite $[O\,;\ \vec{i}\,)$ et la courbe C_g.

Justifier graphiquement que :

$$\int_0^1 (1-t^2)e^{-t^2}\,dt \geq \frac{l}{2}.$$

(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)

NOM & Prénom : ………………………………………… Classe : ……

Annexe

Figure de l'exercice 4