Janvier 2008 Term S

Bac Blanc de Mathématiques (4 h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(5 points)*

Le plan *P* est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit *f* l'application qui, à tout point M de *P* d'affixe non nulle *z*, associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1°) Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E', image de E par *f*.
2°) Déterminer l'ensemble des points M tels que M' = M.
3°) On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
Soit M un point distinct des points O, A et B.

a) Montrer que, pour tout nombre complexe *z* différent de 0, 1 et -1, on a : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b) En déduire une expression de $\frac{\text{M'B}}{\text{M'A}}$ en fonction de $\frac{\text{MB}}{\text{MA}}$, puis une expression de l'angle $(\overrightarrow{\text{M'A}}, \overrightarrow{\text{M'B}})$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MB}})$

4°) Soit Δ la médiatrice du segment [AB]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.
5°) Soit Γ le cercle de diamètre [AB].

a) Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB)
b) Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par *f* ?

Exercice 2 *(5 points)* Elèves suivant l'enseignement de spécialité Sc. Phys. ou S.V.T.

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel *n*, par :
$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$; $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$.

1°) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2°) Soit la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par :

$w_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
b) Exprimer w_n en fonction de *n* et préciser la limite de la suite (w_n).
3°) Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4°) On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par :

$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 2 *(5 points)* Elèves suivant l'enseignement de spécialité Mathématiques.

1°) Calculer le PGCD de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit *u* la suite numérique définie par :
$u_0 = 0$, $u_1 = 1$
et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.

2°) Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite *u*.

3°) a) Montrer que la suite *u* vérifie, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
b) que la suite *u* vérifie, pour tout entier naturel *n*, u_n est un entier naturel.
c) En déduire, pour tout entier naturel *n*, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

4°) Soit *v* la suite définie pour tout entier naturel *n* par : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.
a) Montrer que *v* est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*.
c) Déterminer, pour tout entier naturel *n*, le PGCD de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

<u>Exercice 3</u> *(7 points)*

On considère la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur R par :
$g(x) = e^x - x - 1$.

1°) Etudier les variations de la fonction g sur R. En déduire le signe de $g(x)$.

2°) Justifier que, pour tout x, $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B - *Restitution organisée des connaissances.*

En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations puis le signe de la fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

En déduire une démonstration de la formule du cours : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Partie C

1°) a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2°) a) Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
b) Etudier le sens de variations de f, puis dresser son tableau de variations.

3°) a) Déterminer un équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
b) A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

4°) Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C).

<u>Exercice 4</u> *(3 points)*

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer l'unique bonne réponse.

- **<u>Première proposition</u>**

Une primitive de f définie sur **R** par : $f(x) = xe^{x^2}$ peut être définie sur **R** par :

a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} e^{\frac{x^3}{3}}$ b) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} e^{x^2}$ c) $F(x) = \dfrac{1}{2} e^{x^2}$ d) $F(x) = xe^{x^2}$

- **<u>Deuxième proposition</u>**

La solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$ vérifiant $y(1) = 2$ est la fonction définie sur **R** par :
a) $f(x) = 2e^{-3x}$ b) $f(x) = 2e^{-3}e^{3x}$ c) $f(x) = e^{-3x} + 2$ d) $f(x) = 2e^{3(1-x)}$

- **<u>Troisième proposition</u>**

Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y - x^2$ sont les fonctions définies sur **R** par :

a) $f(x) = Ae^{2x} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$ b) $f(x) = Ae^{2x} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$ c) $f(x) = Ae^{2x} + \dfrac{x^2}{2}$ d) $f(x) = Ae^{2x} - \dfrac{x^3}{3}$