Mardi 6 mai 2008 $1^{\text{ère}}$ S

DEVOIR de Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(3 points)*

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre V si vous pensez que l'affirmation est vraie ou F si vous pensez qu'elle est fausse. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse enlève 0,25 point. L'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total de cet exercice est négatif, la note correspondant à cet exercice est ramenée à zéro.

1°) L'équation $\cos x \geq \frac{1}{2}$ sur $[0 ; 2\pi]$ a pour solution $S = \left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$.

2°) Pour tout réel t on a : $\cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$.

3°) Soit le point A(-2 ; 2) en coordonnées cartésiennes, ses coordonnées polaires sont $A\left(2\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right)$.

4°) Pour tout réel t on a : $\cos(3\pi - t) - 2\sin(\frac{\pi}{2} - t) - \cos(t + \pi) = 0$.

5°) $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{5}=\cos\frac{8\pi}{15}$.

6°) Sachant que $a \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ et que $\cos a = \frac{4}{5}$ alors $\sin a = \frac{3}{5}$.

Exercice 2. *(6 points)*

Un club de sport propose deux types d'abonnements non permutables.
Formule A : une cotisation annuelle de 100 € à laquelle s'ajoute la première année seulement un droit d'entrée de 2 000 €.
Formule B : une cotisation annuelle initiale de 200 € qui augmente de 10% par an. Dés la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue un réduction de 10 € sur la cotisation annuelle. Si C_n est le montant, exprimé en euros, de la cotisation annuelle la n-ième année, on a : $C_1 = 200$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $C_{n+1} = 1,1\, C_n - 10$.
1°) Déterminer la somme T_n versée au club de sport par membre pendant n années avec la formule A .
2°) Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $D_n = C_n + \alpha$ où α est un réel.
Déterminer le réel α pour que la suite (D_n) soit une suite géométrique de raison 1,1 et préciser le terme initial de la suite.
3°) On suppose dans cette question que $\alpha = -100$.
a) Exprimer D_n puis C_n en fonction de n.
b) Soit S_n la somme versée au club par un membre pendant n années avec la formule B.
Montrer que $S_n = 1000[(1,1)^n - 1] + 100n$.
c) A l'aide du tableur de la calculatrice, déterminer le nombre minimum d'années qu'un membre doit cotiser pour que la formule A soit plus avantageuse que la formule B.

<u>Exercice 3.</u> *(4 points)*

Soit u la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n^2}$

1°) Donner une valeur approchée à 10^{-2} des six premiers termes de la suite u.
2°) Que peut-on conjecturer sur la monotonie de la suite u ?
3°) Calculer u_7, que constate-t-on ?
4°) Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ équivaut à $(\sqrt{2} - 1)n^2 - 2n - 1 \geq 0$.
5°) En déduire la monotonie de u à partir d'un certain rang n_0 à déterminer.

<u>Exercice 4.</u> *(7 points)*

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-1 ; 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+9}{x^2-1}$
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1°) Montrer que, pour tout $x \in D_f$: $f(x) = x + \dfrac{5}{x-1} - \dfrac{4}{x+1}$

2°) a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Montrer que C_f admet deux asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées. Les préciser.
c) Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ dont on précisera une équation.
d) Préciser la position relative de C_f et Δ.

3°) a) Justifier que f est dérivable et montrer que l'on a :

$$f'(x) = \frac{x\,P(x)}{(x^2-1)^2}$$ où P est un polynôme de degré 3.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x : $x^3 - 3x - 18 = (x-3)(ax^2 + bx + c)$.
c) En déduire le signe de f' sur $x \in D_f$.

4°) Déterminer les variations de f et dresser son tableau complet.

5°) Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.
Vérifier que le point A(5 ; -5) appartient à T.

6°) Tracer les différentes droites citées et la courbe C_f sur la feuille jointe.