Mardi 16 mai 2006 — Term S_{1-3}

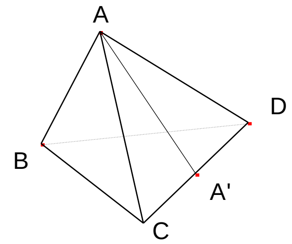
Devoir de Mathématiques (2h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(10 points)*

Soit ABCD un tétraèdre tel que (AB) et (CD) soient orthogonales et BC = BD.
On note A’ le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ACD

Partie A



1°) a) Démontrer que (CD) est perpendiculaire au plan (ABA’).
b) Que représente (BA’) dans le triangle BCD ?
Que peut-on en déduire pour A’ ?
c) En déduire la nature du triangle ACD et du plan (ABA’).

2°) Démontrer que : $\vec{CD}.(\vec{CA}+\vec{DB})=0$

3°) Soit G le barycentre du système de points pondérés {(A ; -1) ; (B ; 2) ; (C ; 1) ; (D ; 1)}

a) Démontrer que G appartient au plan (ABA’) et préciser les coordonnées du point G dans le repère $(A';\vec{A'B},\vec{A'A})$.

b) Caractériser l’ensemble (*E*) des points M de l’espace tels que :
$(-\vec{MA}+2\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD})=k(2\vec{MB}-\vec{MC}-\vec{MD})$ avec $k\in\mathbf{R}$

c) Caractériser l’ensemble (*F*) des points M de l’espace tels que :
$2\left\|-\vec{MA}+2\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}\right\|=3\left\|2\vec{MB}-\vec{MC}-\vec{MD}\right\|$

Partie B

Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal de l’espace (unité graphique : 1 cm). On donne les points :
A(1 ; 3 ; -2), B(1 ; 1 ; 0), C(4 ; 0 ; -2) et D(2 ; α ; 2).

1°) a) Déterminer le réel α pour que le tétraèdre ABCD vérifie les données de l’exercice.
b) Déterminer les coordonnées de A’ milieu de [CD].

2°) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABA’).

3°) Déterminer la distance du point C au plan (ABA’).

4°) a) Calculer la valeur de cos $\widehat{ABA'}$ et en déduire la valeur de sin $\widehat{ABA'}$.
b) En déduire l’aire du triangle ABA’.

5°) Calculer le volume du tétraèdre AA’BC et en déduire le volume du tétraèdre ABCD.

6°) a) Déterminer les coordonnées du point G dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (Partie A 3°)
b) Déterminer une équation cartésienne de l’ensemble (*F*). (Partie A 3°c)

Exercice 2 *(5 points)*

1°) Soit x un réel positif, calculer I(x) = $\int_0^x t\, e^{-t^2}\, dt$

2°) Soit P une loi de probabilité sur [0 ;+ ∞[de densité f définie par $f(t) = \lambda\, t\, e^{-t^2}$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$.

a) Déterminer λ.

b) Calculer P([0 ;1]).

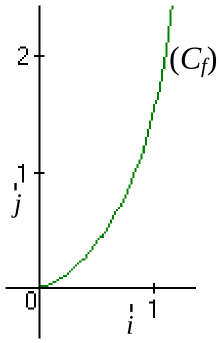
c) On note X la variable aléatoire associée à la probabilité P,

déterminer le réel x_0 tel que $P(X > x_0) = \frac{1}{2}$

Exercice 3 *(5 points)*

1°) Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x\, dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

2°) Soit la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \sqrt{x}\tan x$ dont la courbe (C_f) est représentée ci-contre dans le plan P muni du repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$:



On considère le solide engendré par la rotation autour de l'axe $(O\ ;\ \vec{i})$ de la surface délimitée dans le plan P par l'axe $(O\ ;\ \vec{i})$, la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ et la courbe (C_f).

Sachant que l'unité graphique est de 2 cm, calculer le volume V du solide en cm^3.