Ce document a été fabriqué par PDFmail (Copyright RTE Software)
http://www.pdfmail.com

Term $S_1$ – Mars 2006 – NOM : ...................................................................

## Concours FESIC & ESIEE 2002-2004 (2h)

(Calculatrice interdite)

L'épreuve comporte 12 exercices indépendants, chaque exercice comportant 4 ou 5 affirmations. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).
Toute réponse exacte rapporte un point, une réponse inexacte entraîne le retrait d'un point et l'absence de réponse ne rapporte ni ne retire aucun point.
Pour les exercices 8 à 12 ne comportant que 4 affirmations, une bonification d'un point est accordée à chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

### Exercice 1 (ESIEE 2002)

Soit $\theta \in ]0 ; \pi[$, et $z_1$, $z_2$ les deux nombres complexes définis par :

$z_1 = 1 - \cos\theta + i\sin\theta$

$z_2 = -1 + i$

on a :

a) $|z_1| = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$

b) $\arg z_1 = \dfrac{\pi-\theta}{2}$

c) $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

d) $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$

e) $\dfrac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

### Exercice 2 (ESIEE 2002)

Soit un ensemble de 50 animaux qui sont soit mâle soit femelle et soit carnivore soit herbivore.
On considère les énoncés suivants :
P : tout mâle est carnivore
Q : il existe un mâle carnivore et il existe une femelle carnivore
Alors, dans l'ensemble des 50 animaux :

a) Pour prouver que P est vrai, il suffit de vérifier que tous les herbivores sont des femelles.
b) Pour prouver que P est faux, il est nécessaire de vérifier que tous les mâles sont herbivores.
c) Pour prouver que Q est vrai, il suffit de trouver une femelle carnivore.
d) Pour prouver que Q est vrai, il est nécessaire de trouver une femelle carnivore.
e) Pour prouver que Q est faux, il est nécessaire de vérifier que les 50 animaux sont herbivores.

### Exercice 3 (ESIEE 2002)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = |x| \ln(1 + x^2)$

on a :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
b) $f$ est dérivable en 0.
c) Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x) = \ln(1 + x^2) + \dfrac{2x|x|}{1+x^2}$
d) $f$ est croissante sur $]0 ; +\infty[$.
e) La courbe de $f$ admet la droite d'équation $y = x$ comme asymptote en $+\infty$

Ce document a été fabriqué par PDFmail (Copyright RTE Software)
http://www.pdfmail.com

**Exercice 4** (ESIEE 2002)

Pour toute suite numérique $(u_n)$ et $(v_n)$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \neq 0$, on a :

a) Si $(u_n + v_n)$ converge vers 1 alors $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes.

b) Si $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers 0 alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers une limite finie.

c) Si $(v_n)$ converge vers 0 et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1 alors $(u_n)$ converge vers 0.

d) Si $(v_n)$ est convergente alors $(|v_n|)$ est convergente.

e) Si $(|v_n|)$ est convergente alors $(v_n)$ est convergente.

**Exercice 5** (ESIEE 2002)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 1$

Alors

a) La valeur moyenne de $f$ sur $[0 ; 2]$ est $\frac{16}{3}$.

b) $\int_0^2 f(x)dx$ est l'aire d'un rectangle de longueur $\frac{16}{3}$ et de largeur 2.

c) Il existe une primitive F de $f$ sur $[0 ; 2]$ telle que $F(0) = \frac{16}{3}$.

d) Il existe une primitive F de $f$ sur $[0 ; 2]$ décroissante sur $[0 ; 2]$.

e) Il existe une primitive F de $f$ sur $[0 ; 2]$ telle que pour tout $x \in [0 ; 2]$, $F(x) \leq 0$.

**Exercice 6** (ESIEE 2004)

Dans un jeu, on lance une bille dans un appareil comportant 6 portes de sortie numérotées de 1 à 6.

La probabilité que la bille sorte par la porte 1 est $\frac{1}{6}$.

La règle du jeu est : un joueur mise 1 \$, il reçoit 3 \$ si la bille sort par la porte 1, sinon il ne reçoit rien.
Yvon fait 6 parties successives. X est la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées par Yvon.

a) $P(X = 2) = \frac{1}{3}$

b) $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$

c) La probabilité qu'Yvon ne perde pas d'argent est $P(X \geq 2)$.

d) Yvon peut gagner au plus 12 \$

e) La probabilité qu'Yvon gagne de l'argent est égale à la probabilité qu'il en perde.

**Exercice 7** (ESIEE 2004)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)\, f(-x) \leq 0$.

b) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) + f(x) = e^{-x}$.

c) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \leq 1$.

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

e) $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

Ce document a été fabriqué par PDFmail (Copyright RTE Software)
http://www.pdfmail.com

**Attention** les exercices suivants ne comportent que 4 affirmations mais ne sont pas plus simples, c'est pourquoi une bonification d'un point est accordée à chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

**Exercice 8** (FESIC 2002)

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes $U$ et $V$.
L'urne $U$ contient 2 boules blanches et $n$ boules noires ; l'urne $V$ contient $n$ boules blanches et 2 boules noires.
On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette urne, successivement et sans remise. On désigne par :
U l'événement : « on choisit l'urne $U$ » ;
V l'événement : « on choisit l'urne $V$ » ;
B l'événement : « les deux boules tirées sont blanches ».

a) On a : $P(B \cap U) = \dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$.

b) On a : $P(B) = \dfrac{n^2 - n + 2}{(n+2)(n+1)}$.

c) On a : $P_B(U) = \dfrac{2}{n^2 - n + 2}$.

d) Pour que $P_B(U) \leq 0{,}1$, il suffit que $n \geq 4$.

**Exercice 9** (FESIC 2002)

On rappelle que $2 < e < 3$.
Soit $f$ la fonction définie sur **R** par : $f(x) = (x + 1)\, e^{2x}$.

a) La fonction $f$ vérifie l'équation :
pour tout $x \in \mathbf{R}$ $\quad y'(x) - 2y(x) = e^{2x}$.

b) L'équation $f(x) = -\dfrac{1}{16}$ a deux solutions distinctes.

Pour $\alpha$ réel, on pose : $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{-1} f(x)dx$.

c) Pour tout réel $\alpha$, on a :
$I(\alpha) = -\dfrac{1}{4e^2} - \dfrac{2\alpha+1}{4} e^{2\alpha}$.
(On pourra utiliser une intégration par parties.)

d) On a : $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha) = +\infty$.

**Exercice 10** (FESIC 2004)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$

a) La partie réelle de $(1 + 2i)^5$ est 41.

b) On considère trois points quelconques A, B et C du plan d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$.
L'écriture $(b - c) = i\,(a - c)$ caractérise une homothétie de centre C et de rapport $i$.

c) $(1 + i)^{20}$ est un réel.

d) L'équation $z^4 - 1 = 0$ possède 4 solutions distinctes dans **C**.

Ce document a été fabriqué par PDFmail (Copyright RTE Software)
http://www.pdfmail.com

**Exercice 11** (FESIC 2004)

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$z_0 = 1 \text{ et, pour tout } n\in\mathbf{N},\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n.$$

Pour $n\in\mathbf{N}$, on appelle $M_n$ le point d'affixe $z_n$ dans le plan complexe d'origine O.

a) La suite $(|z_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Quel que soit $n\in\mathbf{N}$, les triangles $OM_nM_{n+1}$ sont rectangles.

c) $M_n$ appartient à l'axe des abscisses si, et seulement si, $n$ est un multiple de 4.

d) Pour tout $n\in\mathbf{N}$, $z_n = \dfrac{e^{i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

**Exercice 12** (FESIC 2004)

a) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ par :
$f(x) = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$.
La dérivée $f'$ de $f$ est la fonction définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ par :
$f'(x) = 2\sin(\ln x)$.

b) $7\ln(\sqrt{2}+1) + 2\ln(3+\sqrt{2}) - \ln(11+6\sqrt{2}) + 7\ln(\sqrt{2}-1) = 0$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \frac{1}{2}\ln 2$.

d) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4 - 2\sqrt{e}$.