Mardi 14 mars 2006 Term $S_{1\text{-}3}$

DEVOIR de Mathématiques (2h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(13 points)*

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x + 1) \ln |x - 3|$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unités : 1 cm.

1°) Préciser l'ensemble de définition D_f de f.

2°) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f et en déduire une asymptote verticale à (C_f).

3°) a) Justifier que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$.

b) Justifier que f' est dérivable sur D_f et que $f''(x) = \dfrac{x-7}{(x-3)^2}$.

En déduire les variations de la fonction f'.

c) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur D_f et que $\alpha \approx 0{,}8$.

d) En déduire le signe de f' sur D_f.

4°) Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations complet.

5°) Tracer la courbe (C_f)

6°) a) Soit g la fonction définie sur $[-1 ; 2]$ par :

$g(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 + 2x - 15) \ln |x - 3|$.

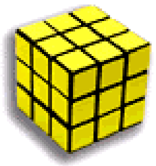
Calculer $g'(x)$. (on remarquera que : $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$)

b) En déduire une primitive de f sur $[-1 ; 2]$.

c) Déterminer l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre la courbe (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

Exercice 2 *(7 points)*

On dispose d'un cube en bois de 3 cm d'arête, peint en bleu.
On le découpe, parallèlement aux faces, en 27 cubes de 1 cm d'arête.
On place ces 27 cubes dans un sac.



Partie I

On tire au hasard l'un des 27 cubes du sac.
On suppose que les tirages sont équiprobables.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de faces peintes sur le cube tiré.

1°) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2°) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Partie II

On tire maintenant, au hasard, simultanément deux des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1°) Montrer que la probabilité d'avoir, au total, six faces peintes est égale à $\dfrac{28}{351}$.

2°) On désigne par n un nombre naturel non nul ; après avoir noté le nombre de faces coloriées sur les deux premiers cubes tirés ; on les remet dans le sac et on recommence l'opération de manière à effectuer n tirages successifs et indépendants de deux cubes.

a) Calculer la probabilité p_n pour que l'on obtienne, au total, $6n$ faces peintes.

b) Déterminer la plus petites valeur de n pour que p_n soit inférieur à 10^{-12}.

Les résultats des calculs de probabilités seront donnés sous forme fractionnaire.