Mercredi 25 janvier 2006 Term S

DEVOIR de Mathématiques (2h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(6 points)*

Partie A – Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

(E) $y' - 3y =$

On donne une fonction φ dérivable sur **R** et la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = e^{-3x}\varphi(x)$.

1°) Montrer que f est dérivable sur **R**
et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.

2°) Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur **R**

et vérifie $\varphi(0) =$.

Partie B – Etude d'une fonction

Soit f définie sur **R** par :

.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f.

2°) Tracer C.

Exercice 2 *(6 points)*

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.

1°) On pose

Œ La forme algébrique de z^2 est :

a) 2 b) $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ c) $2 + \sqrt{2} + i(2 - \sqrt{2})$ d) $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

- z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

a) b) c) d)

2°) On pose , et

Œ z_3 s'écrit sous forme exponentielle :

a) b) c) d)

- et sont les cosinus et sinus de :

a) b) c) d)

3°) Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = iz + 2$

Œ f admet un point invariant d'affixe :

a) $i + 2$ b) $1 + i$ c) i d) 2

- La transformation f est :

a) une homothétie b) une symétrie centrale
c) une translation d) une rotation

<u>Exercice 3</u> *(8 points)*

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur **N** par $u_0 = 3$ et pour tout n de **N** :

et

1°) Calculer v_0, u_1, v_1, u_2 et v_2.
Comparer les valeurs approchées de u_2 et v_2.

2°) En utilisant une démonstration par récurrence, démontrer que, pour tout n de **N**, u_n et v_n sont tous deux strictement positifs.

3°) Démontrer que, pour tout n de **N**, on a : .

En déduire que pour tout n de **N** on a : $u_n - v_n \geq 0$.

4°) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante puis que la suite (v_n) est croissante.

5°) a) Justifier que pour tout n de **N** on a : $u_n \geq$.

b) Démontrer que pour tout n de **N** on a :

avec $k =$

c) En déduire, par récurrence, que pour tout n de **N** on a :

.

6°) a) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) Résoudre l'équation dans $]0\,;+\infty[$ et en déduire la limite des

suites (u_n) et (v_n).