Mercredi 9 novembre 2005 T°S

# *Devoir de Mathématiques (2h)*

*(Calculatrice autorisée)*

**Exercice 1** *( 4 points)*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}\backslash\{-1\ ;\ 1\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x^4-1}$

Déterminer les limite de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

**Exercice 2** *( 7 points)*

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=x+\sqrt{x^2-6x}$

**1°)** Déterminer l'ensemble de définition de $f$.

**2°)** Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
Peut-on en déduire l'existence d'une ou plusieurs asymptotes à la courbe $(C_f)$ représentative de $f$ ?

**3°)** a) Démontrer que la droite $\Delta$ : $y = 2x - 3$ est asymptote oblique à la courbe $(C_f)$ en $+\infty$.
b) Etudier les positions relatives de la droite $\Delta$ et de la courbe $(C_f)$ sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et sur $[6\ ;\ +\infty[$.

**4°)** a) Etudier la dérivabilité de la fonction $f$ en 0 et en 6.
b) Quelles en sont les conséquences graphiques ?

**Exercice 3** *( 9 points)*

Soit $f$ l'application de $\mathbf{C}\backslash\{i\}$ dans $\mathbf{C}$ définie par : $f(z)=\dfrac{z+3}{z-i}$

**Partie A – Quelques valeurs.**

**1°)** Calculer $f(1)$ et $f(2i)$.

**2°)** Résoudre $f(z) = 2$.

A tout point M du plan complexe d'affixe $z \neq i$ on associe le point M' d'affixe $z'$ tels que : $z' = f(z)$

On note : $(E_1)$ l'ensemble des points M tels que : $|z'| = 1$.
$(E_2)$ l'ensemble des points M tels que : $z'$ soit réel.
$(E_3)$ l'ensemble des points M tels que : $z'$ soit imaginaire pur.

| Le but de l'exercice est de déterminer ces ensembles de points par deux méthodes différentes |
|---|

**Partie B – Méthode algébrique.**
Soient $x, y, x', y'$ les réels tels que $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

**1°)** a) Exprimer $|z + 3|$ et $|z - i|$ en fonction de $x$ et de $y$.
b) En déduire une équation cartésienne et la nature de l'ensemble $(E_1)$.

**2°)** a) Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et de $y$.
b) En déduire une équation cartésienne des ensembles $(E_2)$ et $(E_3)$.
c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $(E_2)$ et $(E_3)$.

**Partie C – Méthode géométrique.**

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = -3$ et $z_B = i$.

**1°)** Interpréter géométriquement : $|z'|$ en fonction de A, B et M.

**2°)** Interpréter géométriquement : $\arg(z')$ en fonction de A, B et M.

**3°)** Retrouver par une méthode géométrique la nature et les éléments caractéristiques de $(E_1)$, $(E_2)$ et $(E_3)$ obtenus dans la partie B.