

Mardi 4 octobre 2005

Term S

DEVOIR de MATHÉMATIQUES

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (6 points)

1°) Soit g la fonction définie sur \mathbf{R} par : $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

- Etudier le sens de variation de g sur \mathbf{R} .
- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans \mathbf{R} une unique solution que l'on note α .
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- Déterminer le signe de g sur \mathbf{R} .

2°) Soit f la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$.

- Démontrer que le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $g(x)$ sur $[1 ; +\infty[$.
- En déduire le sens de variation de f sur $[1 ; +\infty[$.
- En utilisant la définition de α , démontrer que : $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 3 & \text{si } x \in]-\infty; 1[\\ f(1) = -2 \\ f(x) = \sqrt{x-1} - 2 & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

- f est-elle continue en $x = 1$?
- f est-elle dérivable en $x = 1$?
- Quelles conséquences graphiques peut-on tirer des résultats précédents ? Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. (Aucune étude de variations n'est exigée)

Exercice 3 (3,5 points)

A tout nombre complexe z on associe le nombre complexe égal à

$$f(z) = \frac{1}{6}((3+4i)z + 5\bar{z})$$

1°) Calculer $f(3)$, $f(i)$ et $f(1-4i)$.

2°) Exprimer $z' = \frac{f(z) - z}{1+2i}$ à l'aide de z et de \bar{z} .

3°) En déduire que z' est réel pour tout z complexe.

Exercice 4 (3,5 points)

Soit (E) l'équation complexe : $\frac{1}{z} - 2\bar{z} + z - 1 = 0$.

1°) Démontrer que $z = x + iy$ avec $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$ est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{cases} -x^2 - x - 3y^2 + 1 = 0 \\ (2x-1)y = 0 \end{cases}$$

2°) En déduire la résolution de l'équation (E) dans \mathbf{C} .

Exercice 5 (3 points)

Résoudre dans \mathbf{R} , puis dans $]-\pi ; \pi]$, l'équation : $\tan 3x = \sqrt{3}$.