Lundi 24 avril 2006 Term S

Bac Blanc de Mathématiques (4h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(5 points)*

Partie A – Etude d'une fonction *f*.

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle I = $]-\frac{1}{2}\ ;+\infty[$ par :

$f(x) = \ln(1 + 2x)$.

1°) Justifier que f est strictement croissante sur l'intervalle I.

2°) Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de I.

3°) On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par :
$g(x) = f(x) - x$.

a) Etudier les variations de g sur I.
b) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et une autre, notée β, appartenant à l'intervalle [1 ; 2].
c) En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle I.

4°) Justifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\beta[$, $f(x)$ appartient aussi à $]0\ ;\beta[$.

Partie B – Etude d'une suite récurrente.

On appelle $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à $]0\ ;\beta[$.

2°) Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

3°) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

4°) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

Exercice 2 *(5 points)*

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article. Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1°) Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,0494.

2°) Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

a) Définir la loi de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre ?

3°)

a) Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.
b) Il veut que, sur sa commande, la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50%. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

4°) La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,0007, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = 0{,}0007\ e^{-0{,}0007x}$.
Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1000 jours.

<u>Exercice 3</u> *(5 points)* **(pour les élèves ayant choisi la spécialité Mathématiques uniquement)**

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1°) On considère la transformation f qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$

a) Exprimer en fonction de z l'affixe de (f o f)(M).

b) Montrer que f = R o S, où R est une rotation et S une symétrie axiale (on déterminera les éléments caractéristiques de ces transformations R et S).

c) A est le point d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. Donner un argument de ce complexe.
Vérifier que R = $S_{(OA)}$ o S où $S_{(OA)}$ est la symétrie axiale d'axe (OA).
En déduire que $f = S_{(OA)}$.

2°) On considère la transformation g qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M″ d'affixe z'' telle que :

$$z''=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

a) Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants de g.

b) Montrer que g = T o f où T est une translation (on précisera l'affixe du vecteur $\vec{n}$ de la translation T).

c) Vérifier que $\vec{n}$ est orthogonal à la droite (OA).
Vérifier que T = S_Δ o $S_{(OA)}$ où S_Δ est la symétrie axiale par rapport à la droite image de (OA) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{n}$.
En déduire que $g = S_\Delta$.

d) Quelle est l'image par g du point B d'affixe $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$?
En déduire une construction de Δ qui n'utilise pas son équation., et l'illustrer en complétant la figure précédente.

<u>Exercice 3</u> *(5 points)* **(pour les élèves ayant choisi la spécialité Sc. Physiques ou S.V.T. uniquement)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ ayant comme unité graphique 2 cm.

1°) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$.

On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Ecrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.

2°) a) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Ecrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

b) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$.

Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

3°) Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle OA'B' et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

a) Justifier les égalités suivantes :

$$c\bar{c} = \mathrm{R}^2\ ;\ (c-2i)(\bar{c}+2i) = \mathrm{R}^2\ ;$$

$$\left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \mathrm{R}^2.$$

b) En déduire que $c - \bar{c} = 2i$ puis que $c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

c) En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

<u>Exercice 4</u> *(5 points)*

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}\,e^{-x}$.

Pour tout $\alpha > 1$, on considère l'intégrale : $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x)\,dx$.

1°) Interpréter géométriquement le nombre $I(\alpha)$.

2°) Démontrer que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, on a : $e^{-x} \leq f(x) \leq x\,e^{-x}$.

3°) En déduire que pour tout $\alpha > 1$:

$$e^{-\alpha} - e^{-2\alpha} \leq I(\alpha) \leq (\alpha + 1)\,e^{-\alpha} + (-1 - 2\alpha)\,e^{-2\alpha}.$$

4°) Rappel : « Une fonction g admet une limite égale à l en $+\infty$ » signifie :
« Pour tout intervalle ouvert I contenant l, on peut trouver un réel A tel que : I contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x supérieur ou égal à A. »

Démontrer le théorème suivant :
« Soient u, v et w des fonctions définies sur $[1\,;+\infty[$ telles que :
pour tout réel $x \geq 1$, $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$, et soit l un réel.
Si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = l$ et $\lim_{x\to+\infty} w(x) = l$ alors $\lim_{x\to+\infty} v(x) = l$. »

5°) En déduire la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.