Mercredi 14 décembre 2005 Term S

Bac Blanc I
Mathématiques (4h)

(Calculatrice autorisée)

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Pour une meilleure lisibilité, rédiger chaque exercice sur des copies séparées.

Exercice 1 *(5 points)*

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1°) Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$, puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on ait :

$$P(z) = (z^2 + 3)\,Q(z).$$

2°) Résoudre dans **C** l'équation $P(z) = 0$.

3°) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et Ω d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$ et $z_\Omega = -3$.

On construit les points :

- B symétrique de A par rapport à l'axe des réels,
- C image de A par l'homothétie de centre Ω et de rapport 2,
- D image de C par la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

a) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
b) Déterminer les affixes z_B, z_C et z_D des points B, C et D.
c) Démontrer que le triangle ACD est rectangle en A.
d) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.

4°) On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que :

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

Exercice pour les élèves suivant la spécialité Mathématiques

Exercice 2 *(5 points)*

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.
On pose S = $x + y$ et P = xy.

1°) a) Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.
b) En déduire que S et P sont premiers entre eux.
c) Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).

2°) Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3°) Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : SP = 84.

4°) Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a+b=84 \\ ab=d^3 \end{cases} \quad \text{avec } d = \text{PGCD}(a\,;b)$$

(On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux.)

Exercice pour les élèves suivant la spécialité Sc. Physiques ou S.V.T.

Exercice 2 *(5 points)*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

Partie A
1°) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.
2°) Démontrer que la suite (u_n) est monotone.

Partie B
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$v_n = n(3 - u_n)$$

1°) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2°) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3°) Démontrer que les suites (v_n) et (u_n) sont convergentes et préciser leurs limites respectives.
4°) Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$S_n = u_1 + 2\,u_2 + \ldots + n\,u_n = \sum_{k=1}^{n} k\,u_k$$

Exprimer S_n en fonction de n puis étudier la convergence de la suite (S_n).

<u>Exercice 3</u> *(5 points)*

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbf{R}^*$ par :

$$f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1}.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité est le centimètre.

1°) Démontrer que le point I(0 ; -1) est centre de symétrie de (C).
Que peut-on en déduire pour l'étude de la fonction ?

2°) Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.

3°) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
Préciser la position de (C) par rapport à Δ.
En déduire une équation de l'asymptote à (C) en $-\infty$.

4°) Etudier les variations de f.

5°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $]0\,;+\infty[$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

6°) Tracer (C) ainsi que ses asymptotes.

<u>Exercice 4</u> *(5 points)*

On rappelle qu'une fonction f, définie sur un intervalle I, est dérivable en $a \in$ I si et seulement s'il existe une fonction ε définie sur un intervalle contenant 0 et un réel $f'(a)$ tels que :

$$f(a + h) = f(a) + h.f'(a) + h.\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0,$$

le réel $f'(a)$ est alors appelé : nombre dérivé de f en a.

1°) Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I et $a \in$ I.

a) Donner, en utilisant la définition rappelée ci-dessus, l'écriture de $u(a + h)$ et $v(a + h)$ en fonction de $u'(a)$ et de $v'(a)$.

b) La fonction uv désignant le produit des fonctions u et v, développer: $(uv)(a + h) = u(a + h) \times v(a + h)$.

c) En déduire que la fonction uv est définie et dérivable en a et donner l'expression de $(uv)'$ obtenue.

2°) Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et v une fonction définie et dérivable sur un intervalle J telle que pour tout $x \in$ J, $v(x) \in$ I.
La fonction uov désignant la composée de la fonction v par la fonction u,
rappeler (sans la démontrer) l'expression de $(uov)'$.

3°) Application

a) Justifier que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 2)\sqrt{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et donner une expression simplifiée de $f'(x)$.

b) En déduire une primitive de la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

c) Déterminer la primitive de g sur $\mathbf{R}$ qui s'annule en $x = 1$.