Jeudi 12 mai 2005 — $1^{\text{ère}}$ S

DEVOIR commun de Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(4,5 points)*

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel :

$$u_{n+1} = \quad u_n + 3.$$

1°) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 3.$$

a) Tracer dans un même repère orthonormal d'unité 2 cm la représentation graphique D de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$.
b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.
c) En faisant apparaître le mode de construction, utiliser ce graphique pour représenter u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
d) Quels semblent être le sens de variation et la limite de la suite (u_n) ?

2°) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer que pour tout entier naturel, $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Précisez son premier terme v_0.
b) Exprimer v_n en fonction de n.
c) Exprimer v_n en fonction de u_n, et en déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = -3\times$.
d) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
e) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 *(4 points)*

1°) Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'équation $\cos 4\theta = 0$.

2°) Démontrer que pour tout réel θ, $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$.

3°) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.

b) On pose : $x = \cos\theta$, en déduire les valeurs exactes de cos et de cos .

…/…

Exercice 3 *(5,5 points)*

Dans une usine chacun des 50 ouvriers reçoit chaque mois 5 € pour chacune des pièces produites par l'ensemble des ouvriers. On estime que chaque ouvrier fabrique 2 pièces par mois. En outre, une prime de 30 250 € est partagée mensuellement entre les ouvriers, tous recevant des parts égales.

1°) Démontrer que si la direction embauche n ouvriers supplémentaires ($n \in \mathbb{N}$), le salaire de chacun devient :

$$s(n) = 10 \times f(n)$$

où f désigne la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \quad .$$

2°) a) Etudier la limite de f en $+\infty$.
b) Démontrer que la courbe C représentant f dans un repère admet une asymptote oblique d.

3°) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4°) Tracer d et C (unités graphiques : 1 cm pour 2 unités en abscisses, 1 cm pour 20 unités en ordonnées).

5°) a) Pour quelle valeur de n, le salaire de chacun est-il minimal ?
b) Quelle est la valeur non nulle minimale de n pour que $s(n)$ devienne supérieur à $s(0)$, c'est-à-dire supérieur au salaire de chaque ouvrier avant embauche des ouvriers supplémentaires ?
On justifiera la méthode utilisée.
c) Comment s'interprète la prime de chacun sur le graphique de la question 4 ?

Exercice 4 *(6 points)*

Le but de l'exercice est de construire la perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.

Dans le repère orthonormé (O ;), on donne les points A(3 ; 0 ; 0), B(3 ; 3 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

1°) Vérifier que les triangles AOB et AOC sont des triangles rectangles.

2°) M est un point du segment [OB] et I est le projeté orthogonal de M sur la droite (OA).
J est le symétrique de I par rapport au milieu de [OA].
N est le point de [AC] qui se projette orthogonalement en J sur (OA).
a) Construire une figure.
b) On pose AI = x (donc $x \in [0 ; 3]$).
Exprimer les distances IM et JN en fonction de x.
c) Déterminer les coordonnées des points M et N en fonction de x.
d) Exprimer la distance MN en fonction de x.

3°) f est la fonction $x \quad 6(x-2)^2 + 3$.
a) Vérifier que $MN^2 = f(x)$.
b) Déterminer la valeur de x_0 de x pour laquelle la distance MN est minimale.

4°) Cas où $x = 2$.
a) Déterminer MN^2, AN^2 et AM^2.
b) En déduire que les droites (MN) et (AC) sont perpendiculaires.

c) Démontrer, de même, que les droites (MN) et (OB) sont perpendiculaires.