Mardi 25 mai 2004 Term S_1

DEVOIR de MATHEMATIQUES (2h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1

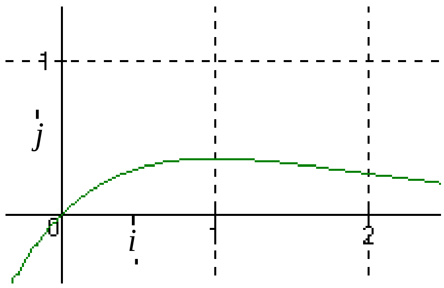
1°) Soit P une loi de probabilité sur [1 ; 10] de densité f définie par $f(x) = \dfrac{\lambda}{x^3}$.

a) Déterminer λ.
b) Calculer P([2 ;5]).

2°) La durée de vie (en heures) d'un élément mécanique a été modélisée par une variable aléatoire X telle que pour tout réel $t \geq 0$: $P(X < t) = 0{,}002\int_0^t e^{-0{,}002x}\,dx$

a) Vérifier que la loi de X est une loi exponentielle dont on précisera le paramètre λ.
b) Calculer P(X < 400).
c) Calculer la probabilité que cet élément ait une durée de vie inférieur à 1000 heures sachant qu'il a déjà tenu 500 heures.

Exercice 2

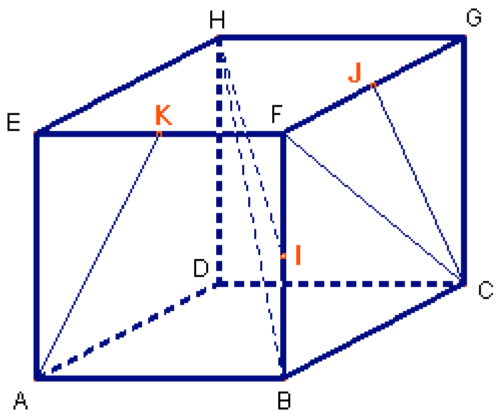


Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,e^{-x}$ dont la courbe (C_f) est représentée ci-contre dans le plan P muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$:
Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, où $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est le repère du plan P, on considère le solide S engendré par la rotation autour de l'axe $(O\,;\vec{i})$ de la surface délimitée dans le plan P par les axes $(O\,;\vec{i})$ et $(O\,;\vec{j})$, la droite d'équation $x = 2$ et la courbe (C_f).

1°) Calculer $I = \int_0^2 (f(x))^2\,dx$. (On pourra utiliser une double intégration par parties)

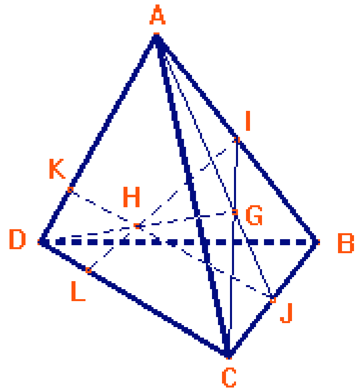
2°) En déduire le volume du solide S en cm^3 sachant que l'unité graphique est de 2 cm.

Exercice 3



Soit ABCDEFGH un cube. On note I, J, K les milieux respectifs des segments [FB], [FG]et [FE].

1°) Montrer que les droites (HB) et (CF) sont orthogonales.
2°) Montrer que les droites (AK) et (HI) sont orthogonales.
3°) Montrer que les droites (AK) et (CJ) sont sécantes.



Exercice 4

Soit ABCD un tétraèdre. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. Soient K et L les points tels que $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.
On note G le centre de gravité du triangle ABC.

Démontrer que les droites (IL) et (JK) sont sécantes en un point H milieu du segment [DG].
(On pourra définir H comme barycentre des points A, B, C et D affectés de coefficients judicieux)

Exercice 5

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points :
A(3 ; -1 ; 0), B(1 ; 1 ; -4), C(-1 ; 0 ; 2), D(5 ; 3 ; 1) et E(3 ; 2 ; 1)

1°) Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur au segment [AB], noté (P_1).
2°) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD), noté (P_2). Vérifier que E appartient au plan (P_2).
3°) Déterminer les coordonnées du point F de concours des plans (P_1) et (P_2) avec le plan (P_3) d'équation $x + 2y + 3z = 0$.
4°) Déterminer les coordonnées du point G d'intersection des droites (BC) et (ED).
5°) Déterminer les coordonnées du point H d'intersection de la droite (ED) et du plan (P_3).

Barème possible :
Exercice 1 : *4 points*
Exercice 2 : *5 points*
Exercice 3 : *3 points*
Exercice 4 : *3 points*
Exercice 5 : *5 points*