Term $S_{1\text{-}4}$ – Avril 2004 – NOM : ....

FESIC – Extrait des concours 2001 et 2002 (2h)

(Calculatrice interdite)

L'épreuve comporte 10 exercices indépendants, chaque exercice comportant 4 affirmations. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).
Toute réponse exacte rapporte un point, une réponse inexacte entraîne le retrait d'un point et l'absence de réponse ne rapporte ni ne retire aucun point.
Une bonification d'un point est accordée à chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est à dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

Exercice 1 (FESIC 2002)

Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - 1) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}.$$

On note (C) la courbe représentative de f et (Γ) celle de g.

On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note M' le point de coordonnées $(x'\,;\,y')$ et d'affixe z', image par R du point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ et d'affixe z.

a) L'ensemble de définition de f est $I =]-1\,;+\infty[$.

b) On a : $z' = iz$.

c) On a : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.

d) Tout point M de la courbe (C) a une image M' par R qui appartient à la courbe (Γ).

Exercice 2 (FESIC 2002)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{\ln(\sqrt{x})}$,

D son ensemble de définition et (C) sa courbe représentative.

a) On a : $D =]0\,;+\infty[$.

b) La courbe (C) admet une droite asymptote en $+\infty$.

c) Pour tout $x \in D$, on a : $f(x) < \frac{x}{2}$.

d) Pour tout $x \in D$, on a : $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$.

Exercice 3 (FESIC 2002)

On considère l'équation différentielle : $y'(x) - 2y(x) = 0$. (E_1)

a) Les solutions de (E_1) sont les fonctions $y(x) = Ke^{x/2}$, où $K \in \mathbb{R}$.

b) L'équation (E_1) admet une unique solution vérifiant la condition $y(0) = 2$ et c'est la fonction $y(x) = e^{2x} + 1$.

On considère l'équation : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ u'(x) + u(x) = 2e^{-3x}$ (E_2).

c) Une fonction f vérifie l'équation (E_2) si et seulement si la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $g(x) = e^{3x} f(x) + 1$, est solution de l'équation (E_1).

d) La fonction : $f(x) = 2e^{-x} - e^{-3x}$
est l'unique fonction u vérifiant l'équation (E_2) et la condition $u(0) = 1$.

Exercice 4 (FESIC 2002)

On considère les fonctions définies par :

$$f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

On note G la primitive de g valant $1 + \ln 3$ en 0 et I son intervalle de définition.

a) On a : $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

b) Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $\mathrm{G}(x) = \ln[f(x)]$.

c) La fonction G est strictement monotone sur I.

d) On a : $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{f(1)}{f(0)}\right)$.

Exercice 5 (FESIC 2001)

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 (1 + x^n)\ln(1 + x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Pour tout $x \in [0\,;1]$, on a : $0 \leq \ln(1 + x) \leq \ln 2$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq \mathrm{I}_n \leq 2\ln 2$.

c) La suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) La suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 6 (FESIC 2002)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \ \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n.$$

On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n \ \text{ et } \ w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n.$$

a) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

b) La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite finie.

Exercice 7 (FESIC 2002)

Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe 4 et l'application F qui, à tout point M distinct de A, d'affixe z, associe le point M' = F(M), d'affixe z' donné par :

$$z' = \frac{z - 4}{4 - \bar{z}}. \qquad (1)$$

a) Le point B d'affixe $1 + 3i$ a pour image par F le point B' d'affixe i.

b) Tous les points de la droite d'équation $x = 4$ privée du point A ont la même image par F.

c) Pour tout point M distinct de A, d'image M' par F, on a : OM' = 1.

d) Pour tout nombre complexe $z \neq 4$, le nombre $\frac{z' - 1}{z - 4}$ (où z' est donné par (1)) est réel.

Exercice 8 (FESIC 2001)

Si z et z' désignent deux nombres complexes, on pose $Z = z\overline{z'} + \overline{z}z'$.

a) Si $z = 2i$ et $z' = -1$, alors $Z = 4i$.

b) Si $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z' = e^{3i\frac{\pi}{4}}$, alors $Z = 0$.

c) Si $z = z'$, alors $Z = 2|z|$.

d) Si z est le nombre complexe de module $r > 0$ et d'argument θ et z' le nombre complexe de module $r' > 0$ et d'argument θ', alors $Z = 2rr' \cos(\theta - \theta')$.

Exercice 9 (FESIC 2002)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient :

- une boule numérotée 0 ;
- une boule numérotée 1 ;
- 2^1 boules numérotées 2 ;
- 2^2 boules numérotées 3 ;

…

- 2^{k-1} boules numérotées k (où k est un entier compris entre 1 et n) ;

…

- 2^{n-1} boules numérotées n.

Les boules sont indiscernables au toucher. On extrait au hasard une boule de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

a) L'urne contient $2^n - 1$ boules.

b) Pour tout entier naturel k tel que $1 \le k \le n$, on a : $P(X = k) = 2^{n-k+1}$.

c) On a, pour $n \ge 2$: $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

d) On a : $E(X) = (n-1)2^n + 1$.

Exercice 10 (FESIC 2001)

Un urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6.
On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On note :

- N, l'événement : « Le dé tiré est normal » ;
- U, l'événement : « On obtient 1 au premier lancer » ;
- Pour n entier non nul, S_n l'événement : « On obtient 6 à chacun des n premiers lancers ».

a) On a : $P(U) = \frac{2}{9}$.

b) Pour tout entier n non nul, on a : $P(S_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Pour n entier non nul, on pose p_n la probabilité d'avoir tiré le dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n premiers lancers.

c) Pour tout entier n non nul, on a : $p_n = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.

d) On a : $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$.