Jeudi 18 mars 2004 Term S

DEVOIR de Mathématiques (2h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (*4 points*)

Soient $I = \int_1^2 \frac{x^2+2x}{(2x+1)^2(1-4x)}dx$ et $J = \int_1^2 \frac{2x^2+1}{(2x+1)^2(1-4x)}dx$.

1°) Calculer $K = 2I + J$ et $L = 2I - J$.
2°) En déduire I et J.

Exercice 2 (7,5 *points*)

Pour les questions 1 et 2, on donnera le résultat sous forme de fraction.
M. Martin a 17 cravates : 12 cravates à motifs et 5 cravates unies. Il range toujours 10 cravates (7 à motifs et 3 unies) du côté gauche de son armoire et 7 cravates (5 à motifs et 2 unies) de l'autre côté.

1°) M. Martin devant partir en voyage pendant 3 jours a besoin de 3 cravates. Pour cela, il les choisit simultanément et au hasard du côté gauche de son armoire. Soit X le nombre de cravates à motifs qu'il choisit :
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer E(X).

2°) Lorsqu'il ne voyage pas, pour déterminer la cravate qu'il portera dans la journée, M. Martin utilise la méthode suivante : il choisit un côté de l'armoire au hasard, de façon équiprobable, et il prend ensuite une cravate, toujours au hasard, sur le côté choisi.
On considère les événements suivants :
G : « M. Martin choisit le côté gauche de l'armoire ».
D : « M. Martin choisit le côté droit de l'armoire ».
M : « M. Martin tire une cravate à motifs ».
U : « M. Martin tire une cravate unie ».
a) Calculer p(M).
b) Calculer $p_M(G)$.

3°) Tous les jours, pendant *n* jours, M. Martin prend une cravate au hasard avec une probabilité égale à $\frac{99}{140}$ de tirer une cravate à motifs. Chaque soir, il remet la cravate utilisée pendant la journée à sa place.
a) Calculer en fonction de *n* la probabilité p_n pour qu'il ait pris au moins une cravate à motifs.
b) Calculer la plus petite valeur de *n* pour laquelle $p_n \geq 0{,}99$

Exercice 3 (***8,5 points***)

On désigne par *f* la fonction définie sur R par :
$f(x) = \ln(e^x + 1)$

Partie A. Etude de la fonction *f*.
1°) a) Calculer les limites de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Etudier les variations de *f* et construire son tableau de variations.
2°) a) Démontrer que pour tout réel x : $f(x) = x + \ln(e^{-x} + 1)$
b) Démontrer que la courbe (*C*) représentative de *f*, admet deux droites asymptotes dont la droite (Δ) d'équation : $y = x$.
c) Déterminer la position de (*C*) par rapport à chacune d'elles.
3°) Construire la droite (Δ) et la courbe (*C*) dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). (unité : 2 cm)

Partie B. Approximation de *f* par une fonction polynôme.
On désire approcher *f* par une fonction polynôme sur l'intervalle [0 ;1].
A cet effet, on considère la fonction *g* définie sur [0 ;1] par :

$$g(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \ln 2 - f(x)$$

1°) a) Etudier les variations de la fonction *g'* (dérivée de *g*) sur l'intervalle [0 ;1]. En déduire le signe de $g'(x)$.
b) Etudier les variations de la fonction *g* sur l'intervalle [0 ;1] et en déduire le signe de $g(x)$.
2°) Démontrer que, pour tout x de [0 ;1] : $0 \leq g(x) \leq 5.10^{-3}$.
Conclure.