Vendredi 6 février 2004 Term S_{1-2}

DEVOIR de Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(4,5 points)*

Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur.
Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur.
Quand il est présent, il le branche une fois sur trois.
Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan.
On note P(E) la probabilité d'un événement E et $P_F(E)$ la probabilité conditionnelle de E sachant F.
Un client téléphone à l'artisan.
On note : R l'événement « Le client obtient le répondeur » ;
A l'événement « L'artisan est présent » ;
$\overline{A}$ l'événement contraire de A.

1°) Déterminer la probabilité P(R), ainsi que les probabilités conditionnelles $P_A(R)$ et $P_{\overline{A}}(R)$.

2°) a) Exprimer P(R) en fonction de $P_A(R)$, $P_{\overline{A}}(R)$ et P(A).

b) En déduire l'égalité $\frac{4}{5} = -\frac{2}{3}P(A) + 1$ et calculer la probabilité pour que l'artisan soit présent.

3°) Un client téléphone ; il obtient le répondeur.
Déterminer la probabilité pour que l'artisan soit présent.

Exercice 2 *(5,5 points)*

On définit la suite réelle (u_n) par $u_0 = 2$ et la relation $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5}{2u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose alors $v_n = \frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$.

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$.

En déduire que $v_n = (v_0)^{2^n}$.

3°) Prouver que $v_0 = \frac{-1}{(2+\sqrt{5})^2}$ et que $|v_0| < \frac{1}{16}$.

4°) En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

…/…

Exercice 3 *(10 points)*

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}.$$

Première partie

♦ **Etude de fonctions auxiliaires**

1°) On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

a) On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

En déduire la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

b) Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

c) Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

d) Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

e) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[e+1\,;e^3+1]$, et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1\,;\alpha[$ et $]\alpha\,;+\infty[$.

2°) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{x}.$$

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$ et prouver que $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)=0$.

b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

c) Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1\,;\sqrt{\alpha}\,]$ et décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{\alpha}\,;+\infty[$.

Deuxième partie

♦ **Etude de la fonction *f***

1°) Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a

$f(x) = \varphi(e^x)$.

2°) En déduire :

a) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 ;

b) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$;

c) le sens de variation de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3°) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

$$f(x)\le\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}.$$

4°) Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près :

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

5°) Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α.