Jeudi 22 janvier 2004 Term S

Devoir de mathématiques (2h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1

a et b sont deux réels tels que $0 < a \leq b$.

A. Résultat préliminaire.

On appelle $g = \sqrt{ab}$ leur moyenne géométrique et $m = \dfrac{a+b}{2}$ leur moyenne arithmétique.

Démontrer que : $a \leq g \leq m \leq b$.

B. Etude de deux suites.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites à termes strictement positifs définies par :

- $a_0 = a$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$;
- $b_0 = b$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

1°) En utilisant le résultat de la question préliminaire démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2°) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{b_n - a_n}{2}$, en déduire que : $b_n - a_n \leq \dfrac{b-a}{2^n}$.

3°) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, que peut-on en déduire ?

4°) Application : Soit $a = 1$ et $b = 10$, calculer à l'aide de la calculatrice a_4 et b_4 à 10^{-5} près.

(Remarque : La valeur ainsi obtenue est une valeur approchée de la moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b.)

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

A. Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}.$$

a) Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Etudier le sens de variation de g.

c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans R, puis justifier que : $0{,}35 \leq \alpha \leq 0{,}36$.

d) En déduire le signe de g.

B. Etude de *f*.

a) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$. En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de f.

c) Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$ et déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2}.

d) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
Préciser la position de (C) par rapport à Δ.

e) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.

f) Tracer Δ, T et (C).