Vendredi 28 novembre 2003 T°S1-2

DEVOIR de Mathématiques (2h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1

1°) *a*) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
Préciser le module et un argument de chacune des solutions.
b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$.
2°) Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = 2\,z_B$.
a) Déterminer les formes algébriques de z_B et z_C. et placer les points A, B et C.
(On complétera la figure au fur et à mesure des questions de l'exercice)
b) Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle (C) de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.
c) Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$, en déduire la nature du triangle IAC.
d) Le point E est l'image du point O par la translation de vecteur $2\overrightarrow{IC}$. Déterminer l'affixe du point E.
e) Le point D est l'image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe du point D
f) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1°) *a*) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Etudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
2°) Soit F la primitive de f sur $[0\,;+\infty[$ telle que $F(0) = 0$. On ne cherchera pas à exprimer $F(x)$.
a) Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur $[0\,;+\infty[$?
b) Quelles sont les variations de F sur $[0\,;+\infty[$?
3°) On définit sur $[0\,;+\infty[$ les fonctions H et K par $H(x) = F(x) - x$ et $K(x) = F(x) - \dfrac{2}{3}x$.
a) Etudier, sur $[0\,;+\infty[$, les variations de H et K.
b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a : $\dfrac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.
c) En déduire la limite de F en $+\infty$.
4°) *a*) Démontrer que l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique α sur $[0\,;+\infty[$.
b) Montrer que l'on peut préciser : $\pi \leq \alpha \leq \dfrac{3}{2}\pi$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, F la primitive de f sur $]-1\,;1[$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = F(\sin x)$.

Démontrer que $g'(x) = 1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et en déduire que $F(\sin x) = x$ pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.