Vendredi 7 novembre 2003 Term S_1

DEVOIR de Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice *(8 points)*

Partie A

On considère le polynôme P(z) de la variable complexe z :

$$P(z) = z^3 + 2(1 - i)z^2 + 2(1 - 2i)z - 4i.$$

a) Calculer P(i) et P($\sqrt{2}$).

b) Déterminer le réel y tel que iy soit solution de l'équation P(z) = 0.

c) En déduire une factorisation de P(z).

d) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes : P(z) = 0.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On prendra 2 cm pour unité graphique.

1°) Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i$, $z_B = -1 - i$ et $z_C = 2i$.

2°) Déterminer l'affixe du point D définie par $\overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA}$ puis placer D.

3°) Montrer que l'affixe du milieu I de [CD] est : $z_I = 1$.

4°) a) Calculer les nombres complexes $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ et $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$.

b) Calculer le module et un argument de ces deux nombres.

c) En déduire la nature des triangles ACD et BCD.

d) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. Tracer (C).

Problème *(12 points)*

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3(x + 2)$.

1°) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrer que l'équation $g(x) = 1$ admet exactement deux solutions α et β sur $\mathbb{R}$ (on appellera β la solution positive) et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune d'elles.

3°) En déduire :

a) la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $g(x) > 1$.

b) la résolution sur $]0 ; +\infty[$ de l'inéquation : $x\sqrt{x^2 + 2x} > 1$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; -2] \cup]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
(unité graphique : 1 cm)

1°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Démontrer que les droites d'équation $(d_1) : y = x + 1$ et $(d_2) : y = x - 1$ sont asymptotes obliques à (C_f) ; préciser une troisième droite asymptote à (C_f).

3°) Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

4°) Démontrer que sur $]-\infty ; -2[\cup]0 ; +\infty[$ on a : $f'(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2 + 2x} - 1}{x\sqrt{x^2 + 2x}}$

En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations complet.

5°) Démontrer que $f(\beta) = \beta + \dfrac{1}{\beta^2}$ et en déduire un encadrement de $f(\beta)$ d'amplitude 0,08.

6°) Tracer la courbe (C_f).