Jeudi 9 octobre 2003 Term S

DEVOIR de MATHEMATIQUES (2h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1.

Soient A, B, C et D' les points d'affixes respectives : $z_A = -1$, $z_B = i$, $z_C = 1 + 2i$ et $z_{D'} = 2i$ dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. (unité 5 cm)

Soit φ l'application du plan P privé de B dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z+1}{z-i}$$

1°) Déterminer l'image C' du point C et l'antécédent D du point D' par l'application φ.
Placer les points A, B, C, C', D et D'.

2°) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, x', y, y' réels.
Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

3°) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que z' soit réel.

4°) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

Exercice 2.

1°) Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{a-x}{x+1} & si \quad x \in \left]-\infty;-2\right[\cup \left]1;+\infty\right[\\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + b & si \quad x \in [-2;1] \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{-x}{x+1} & si \quad x \in \left]-\infty;-2\right[\cup \left]1;+\infty\right[\\ g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x - 2 & si \quad x \in [-2;1] \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$.

…/…

Exercice 3.

Partie A

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - 3x + 4$.

1°) Etudier les variations de P.

2°) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3°) En déduire le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + 2 + \dfrac{3x-2}{x^2}$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. (unité 1 cm)

1°) Démontrer que la courbe C_f admet deux asymptotes que l'on précisera.
Préciser la position de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x + 2$.

2°) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{P(x)}{x^3}$ et en déduire le sens de variation de f.

3°) Déterminer le ou les points où la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ.

4°) Tracer la courbe C_f , la droite Δ et les autres renseignements obtenus sur C_f ,.